

## Bewegungen der abnormalen $E$ -Schicht der Ionosphäre.

Von N. C. GERSON.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 2. November 1951.)

Sehr interessante Bewegungen der abnormalen Flächen-Ionisation wurden über Nord-Amerika während des 16. und 17. Juni 1949 beobachtet. Während die Fläche sich von Osten her zu bewegen schien, wurde außerdem eine weitere Bewegung vom Süden beobachtet.

Kenntnis von der abnormalen  $E$ -Zone<sup>1</sup> kann ertitelt werden, wenn die Ionosphärenmeßstationen mit vertikalen b) mit schrägen Strahlen arbeiten. Die bisherigen Angaben sind beschränkt auf das Reflexionsvermögen (gewöhnlich in Elektronen pro  $\text{cm}^3$ ) der Ionosphäre senkrecht über der Beobachtungsstation. Aus diesem Grund sind viele vertikal arbeitende Ionosphärensender nötig, um ein gutes Bild der abgesonderten Ionosphärenwolken zu erhalten. Da die Zone der abnormalen  $E$ -Ionisation eine bestimmte horizontale Ausdehnung hat, ist es klar, daß eine große Anzahl vertikal arbeitende Sender-Empfänger-Paare nötig ist, um die Fläche festzulegen.

Eine bessere Methode der  $E_s$ -Flächen-Beobachtung wäre möglicherweise durch die Einrichtung einer Reihe von geeignet gelegenen schräg strahlenden bzw. empfangenden Ionosphärenmeßstationen gegeben. Eine optimale Anordnung solcher Stationen könnte gefunden werden, so daß das Erscheinen abnormaler  $E_s$ -Schichten irgendwo über einer gegebenen geographischen Fläche sofort wahrgenommen werden könnte. Dabei müßten natürlich die richtigen Radio-Frequenzen gewählt werden, um das Vorhandensein dieser Art von Ionisation zu erkennen.

Wenn auch die Einrichtung des oben angegebenen Systems von Stationen in wohlbestimmten Zwischenräumen voneinander wohl zu schwierig ist, so ist es trotzdem möglich, ein bestehendes System von Stationen (z.B. Radio-Amateure, die über bestimmte Frequenzen senden) auszunutzen. Während des Studiums der abnormalen  $E$ -Schicht hat der Verband der Radioamateure in großzügiger Weise mitgewirkt, indem er die  $E_s$  Schicht sorgfältig beobachtete und das Erscheinen mitteilte. Die Beobachtungen, welche im folgenden beschrieben werden sollen, hätten in der Tat ohne das Mitwirken der Nordamerikanischen Radioamateure nicht ausgeführt werden können.

Die Beobachtungen wurden während der Zeitperiode 16. Juni 1949 15<sup>00</sup> Uhr bis 17. Juni 1949 00<sup>00</sup> Uhr Greenwich-Zeit, von Radioamateuren, die über Frequenzen von ungefähr 50 MHz sandten, mitgeteilt, so oft sie einen anderen Amateur erreichten, dessen Entfernung über 650 km war. Es wurde angenommen, daß Radioempfang über Entfernungen zwischen 650 und 2100 km auf einmaliger abnormaler  $E$ -Reflexion beruht. Einmalige Reflexion wurde auf

den beiliegenden Landkarten durch einzelne Punkte in der Mitte der Strecke zwischen den Stationen aufgezeichnet. Der Mittelpunkt zwischen den zwei Amateurstationen wurde auf einer Landkarte, welche in LAMBERTScher konformer Projektion gezeichnet war, bestimmt. Diese Punkte wurden dann auf die reproduzierten Karten übertragen. Als Beispiele sind zwei solcher Kartenskizzen (Abb.1 u. 2) und eine Übersichtsdarstellung der Schwerpunkte aller Meßpunkte mit Zeitangabe (Abb.3) wiedergegeben.



Abb. 1. 16. Juni 1949, 23<sup>h</sup> Greenwich Zeit.



Abb. 2. 17. Juni 1949, 01<sup>h</sup> Greenwich Zeit.

Die ersten Mitteilungen der abnormalen  $E$ -Reflexionen wurden um 15<sup>00</sup> Uhr (Greenwich-Zeit) gemacht, zu welcher Zeit zwei auseinanderliegende Reflexionspunkte nahe den Koordinaten 37° N, 82° W und 42° N, 77° W auftauchten. Die  $E_s$ -Schicht konzentrierte sich um 17<sup>00</sup> Uhr ungefähr an der letzteren geographischen Lage und verbreiterte sich ziemlich schnell während der nächsten 2 Stunden. Während 20—21<sup>00</sup> Uhr GZ. wurden keine Mitteilungen erhalten, doch wurden um 21<sup>00</sup> Uhr wieder einige Reflexions- oder Zerstreuungsflächen in der Nähe von 42° N, 77° W aufgefunden. Bis zu 2<sup>00</sup> Greenwich-Zeit wuchs die Zerstreuung sogar schnell an Ausdehnung und deutete eine Bewegung von Osten an. Eine Bewegung der abnormalen  $E_s$ -Schicht ist erkenntlich und die Konzentration der Reflexionspunkte ist verhältnismäßig dicht. Die Geschwindigkeit der  $E_s$ -Schicht A

<sup>1</sup> Neuerdings als  $E_s$ -Schicht bezeichnet. Der Index  $s$  bedeutet „sporadisch“.



(Abb. 3) ermäßigte sich nach ungefähr  $2^{00}$  und die Schicht begann sich auch zu verbreitern. Die mittlere Geschwindigkeit war ONO 130 km/Stunde (im meteorologischen Sinn von ONO).

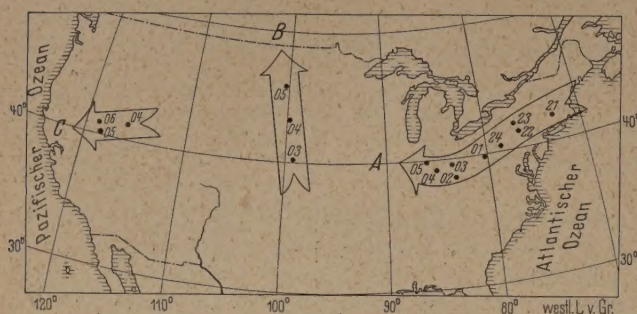


Abb. 3. Übersichtskarte der Wanderung der Wolkenschwerpunkte.

Das unzweideutige Auftauchen der Fläche B erfolgte um  $3^{00}$  Uhr, obwohl ein früheres Anzeichen schon um  $1^{00}$  Uhr vorhanden war. Diese Fläche blieb klein und verschwand nach einer schnellen Bewegung gegen N. Die Geschwindigkeit dürfte ungefähr SSO 300 km/Stunde betragen haben.

Eine weitere kleine Reflexions- oder Zerstreuungsfläche C wurde in der Nähe von  $40^{\circ}$  N,  $115^{\circ}$  W um  $4^{00}$  Uhr beobachtet. Diese Fläche bewegte sich von Osten her mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 100 km/Stunde.

Das plötzliche Erscheinen und Verschwinden der abnormalen E-Wolke kann einem Fallen oder Aufsteigen der betreffenden Wolke zugeschrieben werden. Obwohl die vertikale Bewegung die Analyse kompliziert, dürfte trotzdem eine Andeutung der allgemeinen Bewegung durch die Bewegung des Mittelpunktes der abnormalen E-Wolke gegeben sein. Falls sowohl horizontale als vertikale Bewegung stattfindet, kann die abnormale E-Schicht die Eigenschaft haben a) plötzlich zu erscheinen b) sich seitlich zu bewegen oder

c) plötzlich zu verschwinden. Obwohl diese Bewegungen die Bewegung einer Ladungswolke andeuten, darf die Möglichkeit der Verschiebung eines Zentrums der Ionosphäre, welcher die beobachteten Effekte bewirkt, nicht ganz ausgeschlossen werden.

Über die Zuverlässigkeit der Angaben müssen einige Worte der Vorsicht gesagt werden. Die Stationen der Amateure sind unbekannt, und die dargestellten Bewegungen sind durch die Zahl der Zeit sendenden und empfangenden Radioamateure beeinflusst. Eine Veränderung der Zahl oder der geographischen Position der aktiven Beobachter während der Wirksamkeit der abnormalen E-Schicht könnte als eine Bewegung der E<sub>s</sub>-Schicht gedeutet werden. Jedoch kann füglich angenommen werden, daß für die obigen Angaben eine genügend große Anzahl von Beobachtern tätig war, so daß die erhaltenen Bewegungen wahre Bewegungen sind.

Die Möglichkeit besteht, daß die Bewegungen der abnormalen E-Wolken eine Korrelation mit den Bewegungen der leuchtenden Nachtwolken haben. Es nimmt meistens an, daß die Höhe der leuchtenden Nachtwolken zwischen 150 und 250 km (oder leicht noch viel höher) liegt. Wegen der vielen Korrelationen, welche durch die Anwesenheit des kontinuierlich leuchtenden Hintergrundes des Nachtleuchens und durch die Streuung und die Absorption der Teilchen in der Atmosphäre bedingt sind, haftet aber diesen Höhenbestimmungen eine erhebliche Unsicherheit an. Die Höhe der abnormalen E-Schicht ist bekanntlich ungefähr 110 km.

Der Verfasser dankt wärmstens für die Hilfe ihm im Durchsehen der Angaben von O. P. FERRELL, M. BERGEN von Radio Magazines, Inc. und im Zeichnen der Angaben von F. P. CROWLEY und L. F. GLEISTEIN geleistet wurde.

N. C. GERSON,  
Geophysics Research Division, AF Cambridge  
Research Center, Cambridge, Mass., USA

## Über die spektroskopische Untersuchung von Kondensatorstößen in Hg-Höchst-Druck-Entladungen\*.

Von J. EULER.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der T. H. Hannover.)

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. Juli 1951.)

### 1. Einleitung.

Technische Höchst-Drucklampen, wie z. B. die Osramtype HBO 200 erreichen in der Säulenachse bei stationärem Betrieb unter normaler Belastung Temperaturen zwischen  $7000^{\circ}$  K und  $8000^{\circ}$  K [1], [2]. Eine wesentliche Steigerung der Belastung bei stationärem Betrieb verbietet sich aus konstruktiven Gründen. Will man die Emission der Höchst-Druckbögen bei wesentlich höheren Temperaturen untersuchen, so ist man auf Stoßentladungen angewiesen. Zu definierten Resultaten kommt man in diesem Falle nur, wenn man das Spektrum zeitlich zerlegt. In der vorliegenden Untersuchung wird der stationär brennenden HBO 200 eine Stoßentladung überlagert und die Verteilung der Strahldichte im zeitlich zerlegten Spektrum der Stoß-

entladung untersucht. Außerdem wurde die Verteilung der Strahldichte im Spektrum der stationär brennenden Lampe gemessen. Die Untersuchung bezog sich in beiden Fällen auf den Wellenlängenbereich zwischen  $4300 \text{ \AA}$  und  $6200 \text{ \AA}$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Im Zusammenhang mit der spektroskopischen Untersuchung wurden auch Lampenstrom und -Spannung während des Stoßes gemessen. Für diese elektrischen Messungen sind nur behelfsmäßige Mittel zur Verfügung. Sie sind zwischen durch Messungen überholt, die von anderer Seite am Physikalischen Institut der Techn. Hochschule mit wesentlich besseren Mitteln durchgeführt werden konnten und demnächst veröffentlicht werden. Hier sei nur Bezug genommen auf die optischen Messungen. Diese Trennung zwischen elektrischen und den optischen Messungen rechtfertigt schon damit, daß die hier behandelten Erscheinungen — Wirkung der Säulentemperatur im Stoßspektrum — mit dem relativen Verlauf der Strom- und Spannungskurven nur losen Zusammenhang stehen (s. dazu Bemerkung auf S. 83).

\* Zum Teil Auszug aus der Diss. Hannover 1946. Wegen der Ungunst der Zeit kann die Veröffentlichung erst jetzt erfolgen.



Die Messungen liegen schon länger zurück und können aus zeitbedingten Gründen nicht zur Publikation. Zwischenzeitlich hat H. BARTELS eine Theorie der Emission in inhomogenen absorbierenden Schichten entwickelt [4] und darauf eine Methode zur Messung von Temperaturen in stark absorbierenden Bogensäulen aufgebaut [5], [6]. Die Resultate dieser Untersuchungen sind die Möglichkeit, die Diskussion der Messungen nachträglich zu erweitern.

## 2. Versuchsanordnung zur Aufnahme der Stoßspektren.

Abb. 1 gibt einen schematischen Überblick über den optischen Teil der Versuchsanordnung. Die Säule der Höchstdrucklampe (Osram HBO 200) wird durch den Achromaten dreifach vergrößert auf den horizontalen Spalt  $S_1$  von 0,5 mm Breite abgebildet. Ein zweites Achromat  $L_2$  bildet den Spalt  $S_1$  über einen Drehspiegel  $Sp$  dreifach verkleinert auf den vertikalen Spalt  $S_2$  eines STEINHEIL-Universalspektrographen  $GH$  mit 3 Glas-

systemen und 760 mm Kamerabrennweite<sup>1</sup> ab. Die Achse des Spiegelmotors  $M$ , eines großen Synchronmotors mit 1500 U/min, ist horizontal gelagert, so daß die Bildpunkte des Spaltes  $S_1$  auf  $S_2$  bei Drehung des Spiegels parallel zum Spektrographenspalt verschoben werden<sup>2</sup>. Der Auslösemechanismus für die Stoßentladung ist mit der Drehung der Spiegelachse gekoppelt. Er zündet die Stoßentladung bei jeder Umdrehung in genau gleicher Spiegelstellung, sodaß das Bild des Spaltes  $S_2$  bei Einsatz der Zündung stets an die gleiche Stelle des Spektrographenbildfeldes liegt. Durch  $S_1$  und  $S_2$  wird aus dem Bild der Bogensäule ein Oberflächenelement herausgeblendet, dessen Spektrum auf der Platte mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$ , die sich aus der Umdrehungszahl des Motors und den geometrischen Abmessungen des Strahlenganges ergibt, senkrecht zur Dispersionsrichtung verschoben wird. In einem Falle war  $v = 1,72 \cdot 10^3$  mm sec<sup>-1</sup>, d. h. der Zeitachse des Spektrums ist pro 1  $\mu$ sec einer Strecke von 0,17 mm zugeordnet. Das zeitliche Auflösungsvermögen ist durch die Breite des Spektrums in Zeitrichtung gegeben. Da Kollimator und Kamera nahezu gleich lang sind, ist die Breite dem dreifach verkleinerten Bild des Spaltes  $S_1$  gleich. Sie deckt also auf der Platte mit 7 mm gerade die Strecke, die im zeitlichen Ablauf einer  $\mu$ sec entspricht. Im Stoßkreis (Abb. 2) ist neben dem Papierkondensator von 1  $\mu$ F und der Höchstdrucklampe das Edelgasthyratron (AEG SI/3i) als Entladungsschalter eingebaut. Die Höchstdrucklampe wurde gleichzeitig mit den Stößen stationär mit 180 Watt betrieben, um den hohen Druck des Edelgasdampfes aufrecht zu erhalten. Die Polung der Stoßspannung und der stationären Spannung mußten der Lampe einander entgegengesetzt gerichtet sein,

weil sonst die Kathode durch den Ionenaufprall zerstört wird und die Stationärentladung verlöscht. Der Kondensator wird über ein Wolframrohr (Valvo M 1550/N 800 W) aus einer Gleichspannungsmaschine (2 kW, 2 kV) aufgeladen.

Nach Entladung steigt die Kondensatorspannung  $U_c$  zunächst linear an, nähert sich dann aber asymptotisch einem Grenzwert  $U_{c0}$ , der durch die jeweilige

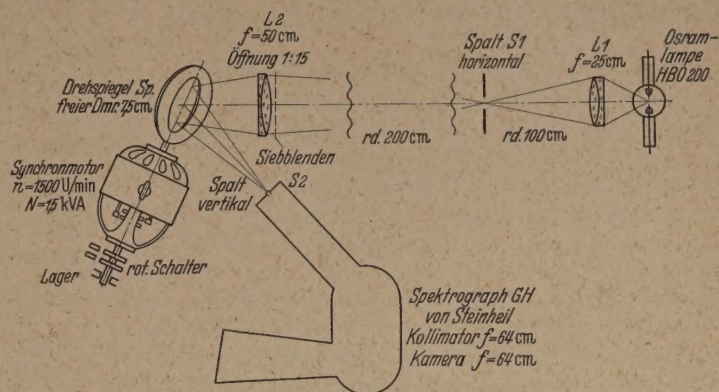


Abb. 1. Strahlengang der Versuchsanordnung, Erklärung im Text.

Maschinenspannung bestimmt wird. Da während jeder Motorumdrehung eine Entladung ausgelöst wird, muß diese Grenzspannung  $U_{c0}$  schon in einem Bruchteil der Umdrehungszeit erreicht werden. Auf der Drehspiegelwelle sitzt ein mechanischer Schalter, der die Gitterspannung des Thyratrons steuert und die Entladung bei der richtigen Stellung des Spiegels freigibt. Der Schalter ist während  $9/10$  des Umlaufs ge-

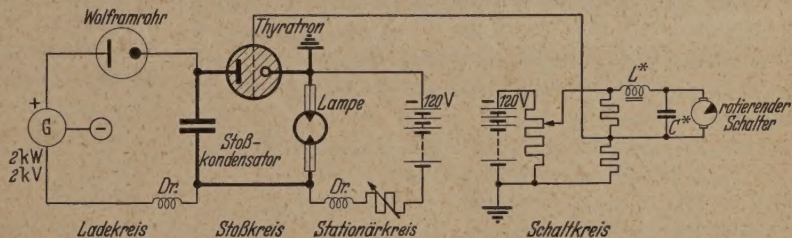


Abb. 2. Schaltplan. Die Lampe wird gleichzeitig stationär und durch das Thyatron  $Ty$  im Rhythmus der Spiegeldrehung mit Kondensatorstößen betrieben. Die Drosseln in den Speiseleitungen verhindern Energieverluste aus dem Stoß.

geschlossen und öffnet sich nur im restlichen Zehntel. Zwei Kohlekontakte schleifen auf je einer Abnahmescheibe, die fest auf der Motorwelle montiert, aber gegen sie isoliert ist und die miteinander leitend verbunden sind. Eine von ihnen trägt den nichtleitenden Sektor, der den Kontakt für ein Zehntel des Umlaufs öffnet. Die beiden Schleifkontakte sind auf einen Bügel montiert, der sich zur Justierung der Zündstellung auf dem Spektrographenspalt um die Motorachse drehen läßt. An den Schalter werden sehr hohe Anforderungen gestellt. Nur bei sorgfältigstem Schliff der Kohlen und sehr genauer Justierung der Abnahmescheiben auf der Motorachse arbeitet er einwandfrei. Erforderlich ist weiter, daß der Motor sehr ruhig läuft und völlig erschütterungsfrei aufgebaut ist. Aus diesem Grunde wählten wir einen Motor von rund 1,5 kW Leistung, dessen großes Trägheitsmoment den Lauf sehr ruhig machte. Die Dämpfung dieses Motors war, wie eingehend untersucht wurde, hinreichend groß, um Drehschwingungen um die Synchronlage zu verhindern.

Wenn der Schalter sich öffnet, wird die negative Gittervorspannung des Thyratrons kleiner, die Zünd-

<sup>1</sup> Für die Überlassung des Spektrographen bin ich dem Direktor des Institutes für physikalische Chemie, Herrn Professor BRAUNE, sehr zu Dank verpflichtet.

<sup>2</sup> Streng genommen wandern die Bildpunkte von  $S_1$  in der Abbildenebene auf Hyperbeln. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Abweichungen, die sich daraus ergeben, vernachlässigbar gering sind.



spannung sinkt unter die Kondensatorspannung  $U_{c0}$ , und die Stoßentladung wird ausgelöst. Der Kondensator  $C$  und die Selbstinduktion  $L$  dienen lediglich dazu, dem ohne sie rechteckigen zeitlichen Verlauf der Zündspannung eine spitze Form zu geben und damit vorzeitigen Zündungen in der gleichen Öffnungsperiode vorzubeugen. Die Kondensatorspannung  $U_c$  wurde oszillographisch überwacht.

### 3. Methoden der photometrischen Messung.

Als Vergleichslichtquelle dient der Krater eines Graphitkohlebogens, dessen Eignung als Strahldichtenormal durch Arbeiten verschiedener Autoren [7] erwiesen ist. Der Krater wird genau an die Stelle des Höchstdruckbogens gebracht und sein Spektrum mit der gleichen Apparatur bei ebenfalls rotierendem Spiegel photographiert. So fallen nicht nur die apparativen Einflüsse, sondern auch die Intermittenzeffekte beim Vergleich heraus. Auf jede Platte kommen neben den Stoßaufnahmen mit gleicher Laufzeit 6 Aufnahmen des Kraterspektrums, bei denen die Intensitäten durch Siebblenden in meßbarer Weise variiert wurden. Die Siebblenden werden unmittelbar vor die Linse  $L_2$  in den Strahlengang eingeschaltet.

Im Vergleichsbogen wurde als positive Kohle ein Siemens ARG-Reinstgraphitstift mit 11 mm Durchmesser verwendet, als negative Kohle eine Homogenkohle von 5 mm Durchmesser. Die beiden Stäbe wurden in einem Winkel von  $90^\circ$  zueinander geführt. Ein nachträglicher Vergleich mit einem genau nach den Vorschriften von PATZELT und BALDEWEIN gebauten und betriebenen Bogen ergab, daß die Strahldichten bei dem hier verwendeten Bogen in dem benutzten Spektralbereich um 4% kleiner waren. Die wahre Kratertemperatur wurde zu  $4000^\circ\text{K}$  und das relative Emissionsvermögen wellenlängen-unabhängig<sup>1</sup> zu 0,74 angesetzt.

Die auf die Einheit der Wellenlängenskala bezogene Strahldichte im Stoßspektrum  $J_\lambda$  wächst beim Stoß im Mittel bis auf das Fünfzigfache, in den Linien auf mehr als das Hundertfache der Kraterstrahldichte  $J_{\lambda_0}$ . Die spektralen Intensitäten am Plattenort müssen also aneinander angeglichen werden, damit bei gleichen Belichtungszeiten vergleichbare Schwärzungen entstehen. Deshalb wird das Kraterspektrum mit größerer Spaltbreite aufgenommen. Dieses Verfahren setzt voraus, daß sich im Kraterspektrum in dem vom Spaltbild überdeckten  $\lambda$ -Bereich weder  $J_{\lambda_0}$  noch die Plattenempfindlichkeit merklich ändert. Aus diesen mit verbreitertem Spalt aufgenommenen Kraterspektren kann man die Absolutwerte der Stoßstrahldichten bestimmen, wenn das Verhältnis  $F$  der Spaltbreiten bekannt ist und man voraussetzen darf, daß die spektrale Intensität im Kraterspektrum zu  $F$  proportional ist. Zur Ermittlung von  $F$  wurden die Spaltbreiten in einem mit Okularmikrometer ausgerüsteten Mikroskop gemessen, das sich reproduzierbar in den Strahlengang klappen ließ. Die Messung wird durch die etwas abgerundeten Kanten der Spaltbacken erschwert; der Fehler der Spaltbreitenmessung dürfte

jedoch  $3 \cdot 10^{-3}$  mm nicht überschreiten. Die Hg-Spektren werden bei Spaltbreiten zwischen  $12 \cdot 10^{-3}$  und  $14 \cdot 10^{-3}$  mm aufgenommen. Demnach wären Fehler bis 25% möglich. Auf den Kraterspektren, denen der Spalt bis zu 0,75 mm geöffnet wird, spielt der Fehler keine Rolle. Um zu untersuchen, inwieweit im Kraterspektrum Proportionalität zwischen Spaltbreite und spektraler Intensität angenommen werden darf, werden Intensitätsänderungen bei Spaltbreitenvariation durch Intensitätsmarken gemessen, die durch Blendenschwächung erhalten werden. Im ganzen benutzten Spaltbreitenbereich darf mit ausreichender Näherung Proportionalität zwischen Spaltbreite und spektraler Intensität angenommen werden. Die Abweichungen waren auch bei engen Spalten erheblich kleiner als die Fehlergrenze, die oben auf Grund einer groben Abschätzung für die Spaltbreitenmessung angenommen wurde<sup>1</sup>.

Verschiebt sich das Bild des Spaltes  $S_1$  auf das Spektrographenspalt  $S_2$ , so wandert der Bündelschnitt auf Kollimatorlinse und Prisma. Diese Wanderung hätte sich durch eine Feldlinse unmittelbar vor dem Kollimatorspalt unterdrücken lassen, sie hätte jedoch die Justierung der Spaltabbildung erschwert und den Zeitmaßstab verzerrt. Da Vignettierung im Spektralapparat auch bei bewegtem Spiegel nicht auftrat, habe ich auf die Feldlinse verzichtet. Weichen wird bei der Ausmessung des zeitlichen Intensitätsverlaufes vorausgesetzt, daß die Breite längs des Spaltes  $S_2$  konstant ist. Die Erfüllung beider Voraussetzungen wird gleichzeitig durch Aufnahmen des Kraterspektrums bei engem Spalt und laufendem Spiegel sichergestellt.

In den Stoßaufnahmen zeigte das Spektrum des Bogens vor Einsetzen der Stoßentladung nur in den Linien ausreichende Schwärzung. Es wurde deshalb das Spektrum der HBO 200 bei normalem stationärem Betrieb gesondert durchgemessen, um so eine Möglichkeit zu schaffen, das Stoßspektrum und das stationäre Spektrum in allen Teilen miteinander zu vergleichen. Um von den stark verbreiterten und teilweise verschobenen Hg-Linien unabhängig Fixpunkte für den Wellenlängenmaßstab zu haben, werden vor der Platte zwei Drahtmarken angebracht, die mit H- und Hg-Linien geeicht sind. Für den Zeitmaßstab dienen zwei kleine Spaltfehler, die sich als „Linien gleicher Zeit“ im Spektrum abzeichnen, als Fixpunkte. Alle Messungen beziehen sich auf einen Strahl, der die Säulenachse in der Mitte zwischen den beiden Elektroden senkrecht schneidet. Gemessen wurde im Wellenlängenbereich zwischen 4300 und 6200 Å. Die Stoßaufnahmen wurden mit einer Kondensatorspannung von 320 V aufgenommen.

### 4. Die Verteilung der Strahldichte bei stationärem Betrieb.

Bei der Diskussion des Stoßspektrums geht man zweckmäßigerweise von einem Vergleich mit dem Spektrum des Bogens aus, dem die Stoßentladung überlagert wird. Deshalb sei zunächst die Strahldichte

<sup>1</sup> Die Abweichungen gegen spätere genaue Messungen des Emissionsvermögens [10] liegen weit unterhalb der hier auftretenden Fehlergrenze. Das hier verwendete niedrigere E.V. (0,74 gegen 0,77) erklärt sich durch die nicht völlig idealen Bedingungen und entspricht den um 4% geringeren Strahldichten des hier verwendeten Bogens.

<sup>1</sup> Natürlich hätte man die Anpassung des Hg-Spektrums an das Kraterspektrum auch durch eine meßbare Schwächung des Hg-Spektrums erreichen können. Da uns Graufilter nur  $\sim 1,5\%$  Durchlässigkeit nicht zur Verfügung standen, haben wir die o. a. Methode benutzt. Im übrigen hätte eine Messung der Filter kaum weniger Probleme geboten als eine Spaltbreitenbestimmung.



nteverteilung im Spektrum der HBO 200 bei stationärem Betriebe besprochen. Der Bogen wurde bei seinen Aufnahmen mit geringer Unterbelastung (180 Watt) betrieben. Das Ergebnis der Messungen ist in Abb. 3 dargestellt. Die Konturen der Linien zeigen die charakteristischen Formen, die schon GÖNG und SCHULZ (11) näher untersucht haben (s. auch [13]). Die Linien 4358 und 5461 Å sind bei weitestgehender Selbstumkehr stark asymmetrisch verbreitert, während das zum Teil schon ineinanderfließende Paar 5779/90 Å symmetrisch verbreitert ist und keine Selbstumkehr zeigt. Neben treten sehr viel schwächer in Erscheinung die Bogenlinien 4916 und 5365 Å, die Hg II-Linien 4961 und 5890 Å sowie die Linien 6121 Å, deren Einordnung nicht festliegt. Deutlich lassen sich in der spektralen Verteilung der Strahldichten Bereiche

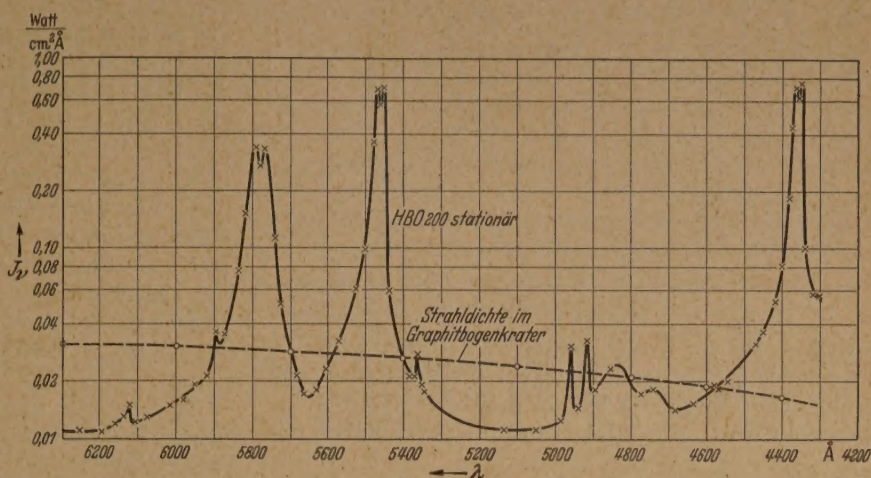


Abb. 3. Stationäre Energieverteilung der HBO 200 bei 180 Watt Belastung. Zum Vergleich ist die Strahldichte des Graphitkraters eingezeichnet.

in denen ein das ganze Spektrum überdeckendes Kontinuum nicht mehr durch die Flügel der verbreiterten Linien überlagert wird, so zwischen 5000 und 6000 Å sowie jenseits von 6000 Å. Auch der Bereich zwischen 4600 und 4900 Å sei mit Vorbehalt der kontinuierlichen Emission zugeordnet. Hier wird der glatte Verlauf durch einige verwaschene Streifen überlagert, die reproduzierbar auf den Aufnahmen auftraten, die bei der im Stoßspektrum zu einem glatten Kontinuum geebnet werden. Um die Absolutwerte der Strahldichten zu veranschaulichen, ist die Strahldichte des Graphitbogenkraters in die Zeichnung eingetragen. Die Strahldichten sind in den Bereichen der kontinuierlichen Emission überall mit denen des Bogenkraters vergleichbar und übersteigen sie in den Linienmaxima um reichlich eine Größenordnung. Neben den bereits auf S. 84 besprochenen Fehlern durch die Halbwertbreitenmessung können noch die Absorption in der Quarzhülle, Schwankungen des Normalbogens und die Ungleichmäßigkeiten der Platte einen Einfluß auf die Genauigkeit des Ergebnisses haben. Die Möglichkeit einer groben Abschätzung des Gesamtfehlers gibt ein Vergleich mit Messungen, die GÖNG [12] an Hochdrucklampen des gleichen Typus durchgeführt hat. GÖNG hat nach einem von BARTELS [5], [6] angegebenen Verfahren die Temperaturverteilung in der Lampe der unter normalen Bedingungen stationär betriebenen HBO 200 untersucht und im Rahmen dieser Untersuchung u. a. auch die Kuppenstrahldichten  $J_{\lambda k}$

an den Linien 4358 und 5461 Å gemessen. Dabei ergab sich unter Berücksichtigung der Verluste in der Quarzhülle  $J_{\lambda k 4358} = 0,79 \text{ Watt/cm}^2 \text{ Å}$  und  $J_{\lambda k 5461} = 0,63 \text{ Watt/cm}^2 \text{ Å}$  mit einem möglichen Fehler von  $\pm 5\%$ . Die hier vorliegenden Messungen ergeben sich als Mittelwerte aus drei bzw. zwei verschiedenen Aufnahmen  $J_{\lambda k 4358} = 0,80 \text{ Watt/cm}^2 \text{ Å}$  und  $J_{\lambda k 5461} = 0,64 \text{ Watt/cm}^2 \text{ Å}$  bei einer Streuung von  $\pm 10\%$ . Beide Messungen führen also innerhalb der Fehlergrenzen zu gleichen Resultaten. Aus dieser Übereinstimmung darf aber nicht ohne weiteres auf den Fehler der vorliegenden Messung geschlossen werden. Denn GÖNG

hat seine Bögen mit 200 Watt voll ausgelastet, während hier die Belastung mit 180 Watt um 10% kleiner war. Wir haben also zum Vergleich die Strahldichten heranzuziehen, die sich aus den GÖNGSchen Messun-

gen für eine um 10% kleinere Belastung ergeben würden. Nun ändert sich zwar die Gesamtstrahlungsleistung einer Hochdrucklampe — zum mindesten bei so kleinen Änderungen — etwa im gleichen Verhältnis wie die Belastung. Auf der anderen Seite wirkt sich aber, wie sowohl die Theorie als auch die Erfahrungen an Stoßentladungen ausweisen, eine Änderung der Belastung und die durch sie bedingte Änderung der Temperatur in den Kuppenstrahldichten sehr viel weniger aus als im Kontinuum und in den äußeren Linienflügeln, ist also auch die Änderung der Kuppenstrahldichten, die sich bei einer Minderung der Belastung um 10% ergibt, sicher sehr viel kleiner als 10%. Man darf also aus dem Vergleich mit den GÖNGSchen Resultaten schließen, daß die Fehlergrenze bei den hier vorliegenden Messungen mit  $\pm 15\%$  nicht zu eng gezogen ist. Da sich die Meßfehler im Kontinuum ebenso auswirken wie in den Kuppenstrahldichten, so gilt die Fehlerabschätzung im ganzen zur Messung herangezogenen  $\lambda$ -Bereich. Wahrscheinlich sind die Fehler im Kontinuum kleiner, da sich Ungleichmäßigkeiten im Plattenkorn in den sehr engen Kuppenmaxima stärker auswirken als im Kontinuum, wo sie durch Messungen an Nachbarpunkten ausgeglichen werden.

Die neueren Messungen von GÖNG sind fraglos genauer als die hier angegebenen Werte. Sie umfassen aber nur Umkehrkuppen und Linienflanken, während hier auch die Kontinua gemessen sind.

#### 5a. Darstellung des zeitlichen Verlaufes während des Stoßleuchtens.

Der zeitliche Verlauf von  $J_{\lambda}$  wurde in mehreren Stoßspektren für eine große Anzahl von Wellenlängen<sup>1</sup> gemessen, bietet aber im wesentlichen stets das gleiche Bild. Abb. 4 und Abb. 5 geben einige typische Beispiele des zeitlichen Ablaufes. Die Wellenlänge  $\lambda = 5750 \text{ Å}$  in Abb. 3 liegt im Flügel der Doppel- linie 5770/90 Å. Diese Linien zeigen im Maximum

<sup>1</sup> Nur in den Umkehrminima mußte wegen des steilen Intensitätsabfalls auf Photometrierung senkrecht zur Dispersionsrichtung verzichtet werden.



des Stoßleuchtens Selbstumkehr. Dabei entspricht  $\lambda = 5750 \text{ \AA}$  der Lage der kurzwelligen Umkehrkuppe. Die beiden Kurven in Abb. 5 ( $\lambda = 4710$  und  $\lambda = 6110 \text{ \AA}$ )

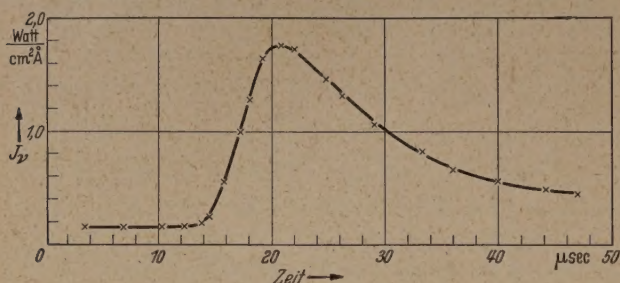


Abb. 4. Zeitlicher Ablauf der Kuppenstrahllichte der gelben Linie 5770 bei  $\lambda = 5750 \text{ \AA}$ .

beziehen sich auf Wellenlängen in den Bereichen, in denen, wie schon oben vermerkt wurde, das Kontinuum nicht durch die Flügel der intensiven Linien überdeckt wird. Die gezeigten drei Kurven haben mit

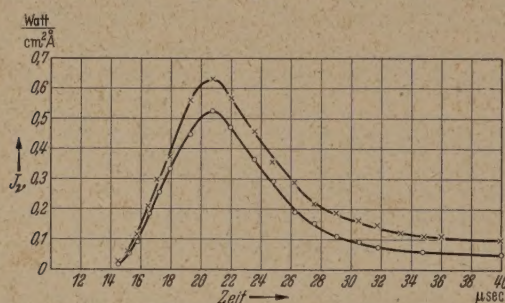


Abb. 5. Zeitlicher Ablauf der Kontinuumsstrahllichte bei 4710 und 6110 Å.

allen anderen einige charakteristischen Merkmale gemeinsam: Innerhalb der Fehlergrenzen wird nach einem steilen Anstieg das Maximum bei allen Wellenlängen in der gleichen Zeit, hier etwa  $6 \mu\text{sec}$  erreicht. Nach Durchlaufen des Maximums fällt die Intensität

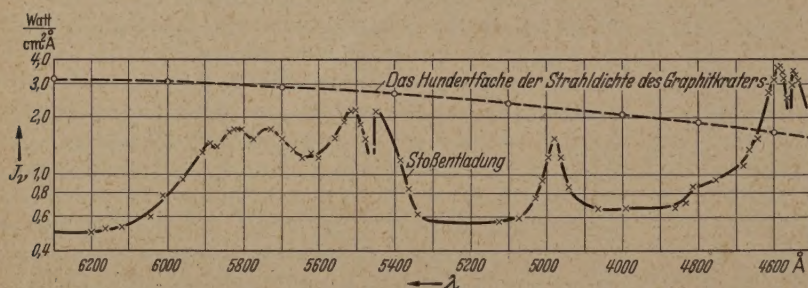


Abb. 6. Energieverteilung im Strahlungsmaximum ( $t = 6 \mu\text{sec}$ ). Zum Vergleich ist die hundertfache Strahllichte des Graphitkraters eingezeichnet.

monoton ab<sup>1</sup>. Im Abfall der Intensität zeichnen sich — besonders deutlich auf den Wellenlängen des Kontinuums (Abb. 5) — zwei Phasen ab. Nach steilerem

<sup>1</sup> Die eingehenden Untersuchungen des Strom- und Spannungsverlaufs während des Stoßes, die inzwischen von anderer Seite im Phys. Institut der Techn. Hochschule durchgeführt worden sind, haben gezeigt: Spannung und Strom durchlaufen ihr Maximum bereits, ehe die Strahllichte ihr Maximum erreicht. Unter den hier gegebenen Verhältnissen werden  $\frac{3}{4}$  der insgesamt von der Lampe aufgenommenen Energie bereits während des Intensitätsanstiegs aufgenommen. Nach Durchlaufen des Intensitätsmaximums sinken Spannung und Strom sehr rasch ab, sodaß es sich bei dem zeitlichen Abklingen der Intensität im wesentlichen um einen Abkühlungsprozeß handelt, bei dem die Maximaltemperatur den Anfangszustand festlegt. Der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung hat auf den Verlauf des Abklingens keinen unmittelbaren Einfluß.

Abfall in der ersten Phase läuft das Stoßleuchten der zweiten Phase sehr langsam aus. Während *Kontinuum* das Absinken in der ersten Phase kaum weniger steil ist als der Anstieg, ist das Absinken den Linienflügeln schon unmittelbar nach Durchlaufen des Maximums sehr merklich flacher, sodaß sich bei der Übergang zum langsamen Ausklingen stärker vermischt als bei den Wellenlängen kontinuierlicher Emission. Nur in den Linienflügeln war die Schwärzung auch im Ausklingen so stark, daß sich die Strahllichte über den ganzen Zeitbereich quantitativ gut verfolgen ließ. Für die Wellenlängen im Kontinuum gibt die Messung infolge der geringen Schwärzung nicht mehr als die Größenordnung. In allen Fällen konnte festgestellt werden, daß am Ende der Zeitskala  $25 \mu\text{sec}$  nach Durchlaufen des Maximums — die Stationärwerte der Strahllichte noch keineswegs erreicht waren.

In 3. wurde gezeigt, daß das Bild des Spalters auf der Platte im Zeitmaßstab gerade den Bereich von  $1 \mu\text{sec}$  deckt. Der gemessene zeitliche Verlauf der Strahllichten läßt schon ohne Reduktionsrechnung erkennen, daß die Begrenzung des zeitlichen Ausmessungsvermögens den Verlauf nicht wesentlich verzerrt.

### 5b. Die spektrale Verteilung der Strahllichte im Maximum des Stoßleuchtens.

Der zeitliche Verlauf des Stoßleuchtens auf einzelnen Wellenlängen zeigt, daß Photometrierung in der Dispersionsrichtung außer im Bereich des langsamen Ausklingens nur im Maximum des Stoßleuchtens möglich sind. Abb. 6 gibt die Verteilung der Strahllichten im Maximum des Stoßleuchtens. In den Linien 4358, 5461 und  $5770/90 \text{ \AA}$  hat die Verbreiterung der Konturen sehr zugenommen, sodaß sich nun auf  $5461$  und  $5770/90$  in den Flügeln deutlich überlagern. Bei 4358 und 5461 sind die Umkehrkuppen von 3- bzw. 5-fache auseinandergerückt. Außerdem zeigt die Doppelstruktur der Linie  $5770/90$  im Gegensatz zur Emission bei stationärem Betrieb deutlich Selbstumkehr. Die beiden Maxima weisen sich dadurch als Umkehrkuppen aus, daß sie gegen die Linien der Linienzentren um etwa  $25 \text{ \AA}$  nach rot bzw. blau verschoben sind. Die bei stationärem Betrieb noch relativ intensive Bogenlinie 4916 ist verschwunden. Auch 5365 und 6104 treten nicht mehr auf. Dagegen

die Hg II-Linie 4961 an Intensität um etwa zwei Größenordnungen zugenommen, ist stark verbreitert und um etwa  $15 \text{ \AA}$  nach rot verschoben. Ebenfalls bleibt die Hg II-Linie 5890, wenn auch nur schwach sichtbar. Auch im Stoßspektrum zeichnen sich schon im Spektrum der stationär brennenden Lampe abgegrenzte Bereiche ab, in denen ein den Linien unterlagertes Kontinuum zu Tage tritt.

In den Stoßaufnahmen erscheinen vor Einsetzen der Stoßentladung die Umkehrkuppen der stationären Entladung. Da an ihnen mit der gleichen Fehlergrenze die gleichen Werte gemessen wurden wie bei den Aufnahmen mit stationärem Betrieb, so darf man annehmen, daß der Meßfehler auch bei den Stoßaufnahmen mit  $\pm 15\%$  ausreichend begrenzt wird.



Um ähnlich wie in Abb. 3 auch in Abb. 6 die Abso-  
rptwerte der Strahldichten anschaulich zu kennzeich-  
nen, wurde in Abb. 6 das Hundertfache der Kohle-  
terstrahldichte eingezeichnet.

### 5c. Quantitative Diskussion des Stoßspektrums.

Nach der Theorie der Selbstumkehr von BARTELS  
[4] kann Selbstumkehr erst eintreten, wenn die op-  
tische Schichtdicke im Linienzentrum  $\tau_0$  einen be-  
stimmten Grenzwert  $\tau_{0g}$  überschritten hat<sup>1</sup>. Wenn  
es sich hier *nicht* um Resonanzlinien handelt, so  
kann man bei Bogensäulen, wie sich aus der BARTELS-  
schen Theorie ergibt,  $\tau_{0g}$  in erster Näherung aus den  
Ionenpotentialspannungen  $V_i$  bzw.  $V_a$  des unteren bzw.  
oberen Linienterms und — bei Elektronenstoßverbrei-  
terung — der Ionisierungsspannung berechnen. Dabei  
sind  $V_u$ ,  $V_i$  und  $V_j$  nur in ihrem Verhältnis zuein-  
ander ein. Bei Elektronenstoßverbreiterung wird  $\tau_{0g}$   
aber als bei anderen Verbreiterungsursachen. Für  
Übergänge, die auf den Ausgangstermen der Reso-  
nanzlinien enden, liegt  $\tau_{0g}$  bei Bogensäulen — von  
einzelnen Sonderfällen abgesehen — zwischen 2,5  
und 5. In dem Maße, wie die optische Schichtdicke  
im Linienzentrum diesen Grenzwert überschreitet,  
verschiebt sich der Abstand der Umkehrkuppen. Das Ausein-  
rücken der Umkehrkuppen bei 4358 und 5461  
ist das Eintreten der Selbstumkehr bei 5770/90 ist  
in allen Fällen auf eine Vergrößerung der Schicht-  
dicke im Linienzentrum zurückzuführen. Ursache  
für die Schichtdickenvergrößerung ist die Temperatur-  
steigerung, die das Verhältnis zwischen den Atomen im  
Grundzustand und den angeregten Atomen zu Gun-  
sten der letzteren verschiebt. Bei 5770/90 wird erst  
nach dieser Temperatursteigerung die Grenzschiech-  
tendicke überschritten. Das „Nachhinken“ und die ge-  
ringere Ausbildung der Selbstumkehr bei 5770/90 ist in  
erster Linie dadurch bedingt, daß der Grundterm viel  
tiefer liegt als bei den beiden anderen Linien. Es wird  
aber auch die Linienform in dieser Richtung aus-  
geprägt: Die Verbreiterung der Linien 5770/90 ist, wie  
ROMPE und SCHULZ [11] nachgewiesen haben, schon  
vor der stationären Entladung zu einem erheblichen  
Anteil durch Elektronenstoßverbreiterung bedingt. Man  
kann also bei merklicher Steigerung der Temperatur mit  
einem wachsenden Einfluß der Elektronenstoßverbrei-  
terung rechnen. Dabei wirkt das schnelle Anwachsen  
der Halbwertsbreite mit steigender Temperatur der  
Abnahme der optischen Schichtdicke entgegen.

Mit steigender Temperatur nimmt auch die Ionen-  
temperatur und damit die Störung durch die Ionenfelder zu.  
Man hat, wie schon ROMPE und SCHULZ [11] bemerk-  
te, einen Abbau der Ionisierungsspannung und für  
höher gelegenen Terme eine weitgehende Ver-  
niedrigung zur Folge. Im Spektrum dokumentieren  
sich, wie GÖRING [12] gezeigt hat, diese Störungen im  
Verschwinden von Linien. In dieser Weise ist das Ver-  
schwinden der Linie 4916 und anderer Bogenlinien in  
der Stoßentladung zu deuten. Es ergibt sich dann,  
daß im Maximum des Stoßleuchtens die Ionisierungss-  
pannung höchstens den Wert 9,2 V haben kann. Die  
wahrscheinliche Ursache — das starke Anwachsen der Ionen-

<sup>1</sup> Das steht auch mit einer Theorie von COWAN und DIEKE  
gut in Einklang. Für die weitere Anwendung liefert aber  
die BARTELSsche Theorie ausreichende Unterlagen.

dichte — ist auch für die Verbreiterung und Verschie-  
bung der Hg II-Linie 4961 verantwortlich zu machen.

### 6. Abschätzung der Temperatur im Maximum des Stoß- leuchtens aus den Kuppenstrahldichten.

Das von BARTELS entwickelte Verfahren läßt eine  
*systematische* Bestimmung der Säulentemperaturen  
nur zu, wenn die Kuppenstrahldichten nicht nur auf  
dem Strahl durch die Achse, sondern auch auf den  
dazu parallelen Strahlen gemessen sind. Zudem wird  
sich zeigen, daß die hier in der Stoßentladung auftre-  
tenden Temperaturen die Grenze übersteigen, bis zu  
der die Theorie bei ihrem derzeitigen Stand sichere Aus-  
sagen gewährleistet. Es kann sich hier also nur um eine  
ziemlich rohe Abschätzung handeln.

Das Auswertverfahren sei nur soweit skizziert, wie  
es zum Verständnis der Formeln notwendig ist. Es  
wird zunächst nach [5] Gl. (13) der Kuppenstrahl-  
dichte  $J_{\lambda k}$  mit

$$J_{\lambda k} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda k}} \cdot \frac{1}{T_w} \quad (1)$$

eine Strahltemperatur  $T_w$  zugeordnet. Aus  $T_w$  ergibt  
sich dann nach [6] Gl. (22) eine erste Näherung  $T'_0$  für  
die wahre Achsentemperatur  $T_0$  mit

$$T'_0 = T_w \frac{1}{1 - \frac{kT_w}{eV_a}} \quad (2)$$

Die Näherung (2) setzt voraus, daß sich der Tem-  
peraturabfall in der Umgebung der Achse ausreichend  
durch eine Parabel annähern läßt und daß  $kT_w/eV_i$   
und  $kT_w/eV_a$  klein gegen 1 sind. Die Abnahme der  
emittierenden Atome durch Ionisation wird vernach-  
lässigt. Die Abweichungen von diesen Voraussetzungen  
bestimmen die Korrekturen, die an  $T'_0$  anzubrin-  
gen sind, um  $T_0$  zu erhalten. Für den stationär be-  
triebenen Bogen sind diese Korrekturen belanglos, so  
daß in völlig ausreichender Näherung  $T'_0 = T_0$  ist. Für  
höhere Temperaturen werden sie aber merklich und  
können hier nicht durch das in [6] entwickelte Itera-  
tionsverfahren erfaßt werden, weil hier nur die Messung  
auf einem Beobachtungsstrahl vorliegt. Sie lassen sich  
hier nur durch eine Schätzung erfassen.

Nach (1) ergibt sich aus

$$(J_{\lambda k})_{4358} = 3,56 \text{ W/cm}^2 \text{ Å; } T_w = 10700^\circ \text{ K und} \\ \text{aus } (J_{\lambda k})_{5461} = 2,16 \text{ W/cm}^2 \text{ Å; } T_w = 11100^\circ \text{ K.}$$

Der Abschätzung wird das Mittel  $T_w = 10900^\circ \text{ K}$   
zugrundegelegt. Mit (2) wird dann  $T'_0 = 12300^\circ \text{ K}$ . Auf  
die weiteren Korrekturen soll hier im einzelnen nicht  
näher eingegangen werden, da die Temperatur als  
solche im Rahmen dieser Untersuchung keine wesent-  
liche Rolle spielt und mit  $T'_0 = 12300^\circ \text{ K}$ , wie schon  
oben vermerkt wurde, die Grenze überschritten ist,  
bis zu der die Abschätzungen völlig gesichert sind.  
Denn bei Temperaturen dieser Höhe wirkt sich im Un-  
terschied zwischen  $T'_0$  und  $T_0$  die Verarmung der  
emittierenden Atome durch Ionisierung sehr stark aus.  
Nach [6] und nach nicht publizierten Untersuchungen  
von BARTELS über die Auswirkung der Ionisierungs-  
verarmung folgt zunächst, daß  $T'_0$  sicher kleiner ist  
als  $T_0$ . Der Unterschied  $T_0 - T'_0$  ist auf etwa  $900^\circ$   
 $\pm 300^\circ$  zu veranschlagen. Unter Berücksichtigung  
der Fehler in der Strahldichtemessung, die sich schon



in  $T_w$  auswirken, würde man  $T = 13200 \pm 800^\circ \text{K}$  zu setzen haben.

Der Schätzung wurde, wie es nach Art und Lage der Linienterme wahrscheinlich ist, die Annahme zugrunde gelegt, daß Elektronenstoßverbreiterung auch im Maximum des Stoßleuchtens keinen Ausschlag gebenden Einfluß auf die Verbreiterung der beiden Linien hat. Es sei hier lediglich zum Vergleich vermerkt, daß sich bei Annahme einer Elektronenstoßverbreiterung eine kleinere Achsentemperatur —  $12100 \pm 600^\circ \text{K}$  — ergeben würde. Denn bei Elektronenstoßverbreiterung werden sowohl der Unterschied zwischen  $T_w$  und  $T'$  als auch die an  $T'$  anzubringenden Korrekturen merklich kleiner.

Bei den Linien 5770/90 hat, wie ROMPE und SCHULZ gezeigt haben, Elektronenstoßverbreiterung schon bei stationärem Betrieb merklichen Anteil an der Halbwertsbreite. Man darf also annehmen, daß die Halbwertsbreite bei so viel höheren Temperaturen überwiegend durch Elektronenstoßverbreiterung bestimmt wird. Berechnet man die Halbwertsbreite nach der UNSOELDSchen Formel auf der gleichen Grundlage wie ROMPE und SCHULZ, so findet man, daß sie schon für  $12000^\circ \text{K}$  den Abstand der Umkehrkuppen um ein Mehrfaches übersteigt. Da außerdem die Halbwertsbreite in diesem Fall innerhalb der Bogensäule sehr stark variiert, sind hier die Voraussetzungen für eine Temperaturmessung aus den Kuppenstrahldichten nicht mehr gesichert. Denn es ist unter diesen Umständen anzunehmen, daß die Selbstumkehr an 5770/90 das in [4] definierte dritte Umkehrstadium noch nicht erreicht hat. Wie sich in [4] aus der Untersuchung der Selbstumkehr bei örtlich variierender Linienform ergibt, ist vielmehr zu erwarten, daß die Kuppenstrahldichten die Werte unterschreiten, die nach der abgeschätzten Temperatur im dritten Umkehrstadium zu erwarten wären<sup>1</sup>. Man errechnet aus einer wahren Achsentemperatur von  $13200^\circ \text{K}$  für das dritte Umkehrstadium in 5770/90 eine Kuppenstrahldichte  $J_{\lambda_k} = 2,38 \text{ Watt/cm}^2 \text{ \AA}$ . Gemessen aber wurde  $1,74 \text{ Watt/cm}^2 \text{ \AA}$ . Der Unterschied entspricht nach Größenordnung und Richtung der theoretischen Erwartung.

### 7. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird die Verteilung der Strahldichte auf die Wellenlängen im zeitlich zerlegten Spektrum der Stoßentladung untersucht. Außerdem wird die stationär brennende Lampe im Wellenlängenbereich von 4700 bis 6200  $\text{\AA}$  quantitativ spektral photometriert.

<sup>1</sup> Das ist nach [4] stets der Fall, wenn die Halbwertsbreite innerhalb der Säule von der Achse bis zum Säulenrand abnimmt.

Im stationären Spektrum sind die Linien 4358, 5461 stark selbstumgekehrt. Das gelbe Linienpaar 5770/90 ist symmetrisch verbreitert, zeigt aber keine Selbstumkehr. Das hängt zweifellos damit zusammen, daß der untere Term dieser Linien wesentlich höher liegt als bei den anderen. Zwischen den Linien heben sich Gebiete ab, in denen das Kontinuum nicht von den Linienflanken überlagert wird.

Im Stoß zeigen in allen Fällen im Rahmen der Meßgenauigkeit alle Wellenlängen den gleichen steilen Anstieg; das Maximum wird stets nach etwa 6–10  $\mu\text{sec}$  durchlaufen. Im Abstieg unterscheiden sich gegen die Linienflanken wesentlich von den Kontinuumflanken. Während der Abstieg im Kontinuum zunächst ebenfalls steil verläuft wie der Anstieg, um dann in einem zweiten Gebiet langsameren Abklingens einzumünden, erfolgt in den Linienflanken der Abstieg sehr viel langsamer. Nach 25  $\mu\text{sec}$ , dem Ende der beobachteten Zeitskala, sind weder im Kontinuum noch in den Linien die stationären Werte erreicht.

Im Zeitpunkt des Maximums haben sich die Linien stark verbreitert. Die Selbstumkehrkuppen bei 4358 und 5461  $\text{\AA}$  sind auf das 3- bzw. 5-fache auseinandergerückt. Die gelbe Doppellinie zeigt jetzt deutliche Selbstumkehr. Die Maxima sind um je 25  $\text{\AA}$  nach außen verschoben. Die Linien 4916, 5365 und 6122 sind infolge von Störungen völlig verschwunden, Hg II-Linie 4961 hat um rund einen Faktor 100 an Intensität gewonnen, ist stark verbreitert und um rund 10  $\text{\AA}$  nach rot verschoben. Mit dem von BARTELS entwickelten Verfahren läßt sich die Temperatur zu rund  $13000^\circ \text{K}$  annähern.

Die vorliegende Arbeit entstand im Physikalischen Institut der T. H. Hannover. Herrn Professor H. BARTELS danke ich für die Anregung und das rege Interesse, das er der Durchführung der Arbeit gewidmet hat. Herrn Professor CARIO und Herrn Dr. W. GÖNG danke ich für eine Reihe klärender Diskussionen.

**Literatur.** [1] SCHULZ, P.: Ann. d. Phys. **1**, 107 (1947). (Dort weitere Literaturangaben.) — [2] BARTELS, H. und W. GÖNG: Naturwissenschaften **36**, 279 (1949). — [3] BARTELS, H.: Z. f. Phys. **125**, 597 (1949). — [4] BARTELS, H.: Z. f. Phys. **126**, 108 (1949). — [5] BARTELS, H.: Z. f. Phys. **127**, 243 (1950). — [6] BARTELS, H.: Z. f. Phys. **128**, 1 (1950). — [7] CHANEY, HAMISTER, GLASS: Trans. el. ch. Soc. **67**, 201 (1935). — [8] PHERSON, J. Mc: J. Opt. Soc. Amer. **30**, 189 (1940). — [9] PATZELT, F. und K. BALWEN: Wiss. Veröff. Siemens **21**, Heft I, 213 (1943). — [10] EULER, J.: Phys. Verh. 1950, 41. — [11] ROMPE, P. SCHULZ: Z. f. Phys. **108**, 654 (1938); **110**, 223 (1938); **118**, 269 (1941). — [12] GÖNG, W.: Naturwissenschaften **558** (1950), Phys. Verh. **3**, 52 (1951) und Z. f. Phys., erscheinend nächst. — [13] HÖPCKE, O. und W. THOURET: Ki. techn. **20**, 148 (1938). — [14] COWAN, R. P. and G. H. DREYER: Rev. Mod. Phys. **20**, 418 (1948).

Dr. JOACHIM EULER, Braunschweig,  
Physikalisches Institut der Technischen Hochschule



# Ein schnellschwingender Galvanometereinsatz zum SIEMENSschen 3-Schleifenszillographen.

Von HANS MEISSNER.

(Mitteilung der Kommission für Tieftemperaturforschung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.)

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 25. Oktober 1951.)

Bei Messungen im Übergangsbereich zur Supra-  
leitung [1] erwies es sich als wünschenswert außer den  
Schleifenschleifen und einem Galvanometer von  
kurzer Schwingungsdauer, dessen Anzeige gleichzeitig  
registriert wurde, ein Meßinstrument mit hoher  
Spannungsempfindlichkeit für einen äußeren Grenz-  
zustand von einigen Ohm bei einer Schwingungs-  
dauer von 0,5 bis 0,1 sec zur Verfügung zu haben. Zu  
dem Zweck wurde ein defekter Schleifeneinsatz zu  
m „Spulenschwinger“ [2] umgebaut, der im Fol-  
genden beschrieben wird, da er wohl auch für manche  
andere Zwecke verwendbar sein dürfte.

## I. Grundsätzliches.

Um eine große Spannungsempfindlichkeit zu er-  
reichen, muß der Innenwiderstand samt Stromzufüh-  
ren usw. sehr klein gemacht werden. Günstig war  
dieser Zweck die hohe Induktion im Luftspalt des  
Strommagneten sowie der kleine zulässige äußere  
Widerstand, da dadurch die Windungsfläche des  
Magneten und damit auch das Trägheitsmoment klein  
gemacht werden kann. Infolgedessen kann auch ohne  
Zulassung der Erhöhung der Schwingungsdauer die  
Induktionskraft klein sein. Um dies zu erreichen mußte  
der gewöhnliche Schleifeneinsatz um einige Zenti-  
meter verlängert werden. Allerdings konnte er dann  
nicht mehr als mittlere 3 Schleifen eingesetzt werden,  
was aber in keiner Weise störte.

Das System kann außer der aperiodisch gedämpf-  
ten Drehbewegung infolge der Spanndrahtaufhän-  
gung auch noch elektromagnetisch nicht gedämpfte  
transversale Schwingungen ausführen, die bei der Art  
der Registrierung ebenfalls eine Bewegung des Licht-  
strahls hervorrufen. Um die transversale Schwingung  
möglichst klein zu halten muß man die Spannung des  
Spanndrahtes möglichst groß machen. Der verwen-  
dete Platindraht konnte nur mit 5 g belastet werden,  
deshalb wurde noch zur Herabsetzung der Erschüt-  
terungen das ganze Magnetsystem aus dem Holzrahmen  
auf einem gewöhnlichen Tisch aufgestellten  
Schleifenszillographen herausgenommen und in geeig-  
neter Weise auf einer Tonsäule montiert. Dann blieb  
dem auch beim Lauf des großen Heliumkompressors  
genügend in Ruhe.

Besondere Aufmerksamkeit ist darauf zu wenden,  
daß das System genügend eisenfrei ist. Man erhält  
es bei der notwendigen kleinen Direktionskraft in-  
folge dauernden Ummagnetisierens keine konstante  
Verzerrung. Es zeigte sich, daß vor allem die handels-  
üblichen Isolierlacke stark paramagnetisch sind. Aus  
diesem Grund und um Oberschwingungen durch  
geringeren Festigkeit zu vermeiden wurde die Spule  
nicht selbsttragend mit Lack zusammengeklebt sondern  
in einen sehr leichten Plexiglasrahmen gewickelt und  
mit sehr wenig reiner Schellack zum Kittieren verwendet.  
Andererseits wurde sie aus eisenfreiem Kupferdraht  
gewickelt.

## II. Der technische Aufbau.

Aus dem bekannten Schleifeneinsatz [3], [4] wurde  
die Spannvorrichtung entfernt, der Systemträger *T*  
ausgelötet und durch einen längeren ersetzt (s. Abb. 1),  
die untere Hülse entsprechend verlängert. Die Pol-  
schuhe *P* wurden etwas abgefeilt, sodaß der Spalt  
3,5 mm breit wurde. Auf den oben am Mittelstück

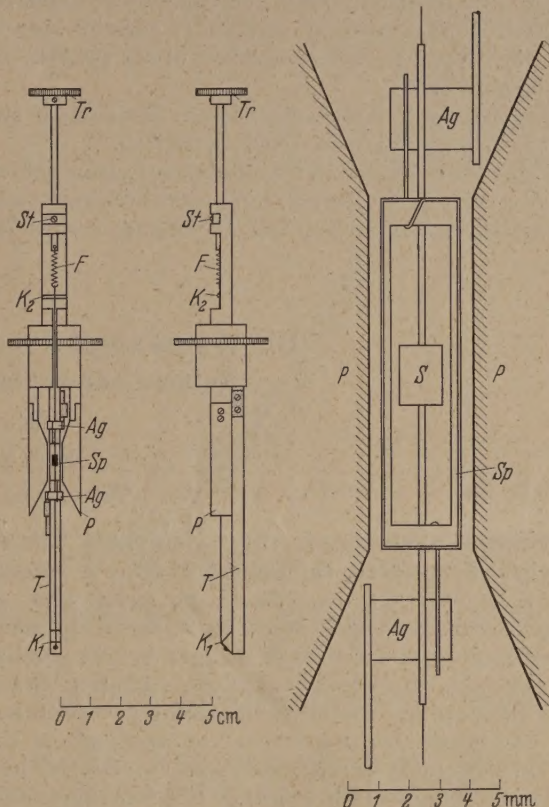


Abb. 1. Aufbau des Galvanometer-  
einsatzes.  
(Bezeichnungen siehe Text.)

Abb. 2. Spule.  
(Bezeichnungen siehe Text.)

befindlichen Zapfen wurde ein mit verschiedenen  
Aussparungen versehenes Neusilberrohr aufgelötet  
und das ganze Mittelstück bis zur Bohrung geschliffen,  
um das System leichter einhängen zu können. Oben  
hatte das Röhrechen eine Führung, in der die Stange  
mit Torsionsknopf *Tr* steckt und ihrer Längsrichtung  
durch einen Stelling *St* fixiert ist.

Der 0,015 mm starke Spanndraht aus Platin führt  
von einem Kamm *K*<sub>1</sub> durch das System über einen  
Kamm *K*<sub>2</sub> zu der im Torsionsstab *Tr* eingehängten  
Feder *F*, die ihn mit 5 g spannt.

Die Stromzuführung zur Spule *Sp* erfolgt von zwei  
in Isolierstücken befestigten Stiften über zwei 2 mm  
breite und etwa 5 mm lange Silberbändchen *Ag*, die  
aus dem bei Vergoldern käuflichen Blattsilber ge-  
schnitten sind. Sie sind direkt an herausstehende  
Enden des Spulendrahtes angelötet (vgl. Abb. 2).

Die Spule *Sp* (s. Abb. 2) ist aus 7,5 Windungen  
0,1 mm starkem eisenfreiem Cu-Lackdraht auf einen



Flexiglasrahmen von nur 20 mg Gewicht gewickelt. In ihrer Achse ist ein 0,2 mm starkes Glasröhrchen eingekittet, das in der Mitte der Spiegel trägt. Der Spanndraht ist durch das Glasröhrchen gezogen und mit ihm verkittet.

### III. Elektrische Daten des Instrumentes.

Der Innenwiderstand samt Zuleitung beträgt  $1,15 \Omega$ , der (äußere) aperiodische Grenzwiderstand  $0,9 \Omega$ , die Schwingungsdauer 0,146 sec, die Spannungsempfindlichkeit im aperiod. Grenzfall bei Spiegelablesung  $0,75 \cdot 10^6 \frac{\text{mm/m}}{\text{V}}$ . Ursprünglich waren aperiodischer Grenzwiderstand, Schwingungsdauer und Empfindlichkeit etwas größer. Leider war jedoch der Spiegel mangelhaft, beim Auswechseln desselben mußten die Stromzuführungsbänder zerstört werden und die neu eingesetzten ergaben etwas größere Divergenzkraft.

Registrierenaufnahmen mit diesem Instrument sind in der eingangs zitierten Arbeit enthalten.

Es wurde noch ein zweites ähnliches System gebaut, das eigentlich in ein DIESELHORST'Sches Galvanometer eingesetzt werden sollte. Dessen Magnet erwies sich

jedoch als zu schwach, weshalb ein Elektromagnet dafür gebaut wurde. Das Instrument wurde jedoch bis jetzt noch nicht in Betrieb genommen.

Zum Schluß möchte ich noch Herrn Dr. KÖGEL vom Wernerwerk M der Firma SIEMENS und HALSCHEIDT in Berlin für die Spende des eisenfreien Kupferdrahtes, Herrn Dr. GERD SCHILDBACH von der Firma ELTRISOLA Eckenhausen, Bez. Köln, für die Spende des Kupferdrahtes für die Feldspulen des Elektromagneten sowie Frl. Dr. ISOLDE DIETRICH vom physikalischen Institut der Universität München für die Herstellung der oberflächenversilberten Spiegel danken.

### Zusammenfassung.

Es wird ein, mit einfachen Mitteln im Laboratorium leicht selbst herstellbarer schnellschwingender Galvanometereinsatz zum Siemensschen 3-Schleifenoszillographen beschrieben.

**Literatur.** [1] MEISSNER, W., F. SCHMEISSNER und MEISSNER: Z. Phys. **130**, 521 (1948). — [2] HÄRTEL, W.: A.T.M. T78 (J 035 — 6); HÄRTEL, W.: A.T.M. T93 (J 035 — 7). [3] JAEGER, W.: El. Meßtechnik S. 260 (1928). — [4] SCHILDBACH, H.: Handbuch d. Phys. XVI S. 327 (1927).

Dr. rer. nat. HANS MEISSNER, Herrsching Obb., Riederstr.

## Die Wärmeabgabe von Drähten an ruhende Luft. Beitrag zur zahlenmäßigen Bestimmung.

Von J. FISCHER.

Mit 4 Textabbildungen.

(Eingegangen am 9. Oktober 1951.)

Bei Heizdrähten in einer Gasatmosphäre, bei thermischen Meßgeräten, bei Einrichtungen zur Messung der Zusammensetzung von Gasen nach dem von SCHLEIERMACHER angegebenen Meßrohrprinzip und bei verschiedenen anderen Anordnungen kommt man auf die Aufgabe, die Erwärmung von Drähten, Stäben oder Bändern aus Metall zahlenmäßig zu bestimmen, die von einem Leitungsstrom von konstantem zeitlichem Mittelwert durchflossen werden. Hierfür ist es eine sehr rohe und für stärkere Erwärmungen unzulängliche Annahme, daß die Wärmeabgabe an eine umgebende, ruhende Substanz proportional sei zur Temperaturerhöhung des Leiters. In Wirklichkeit hängt diese vermeintliche Proportionalitätskonstante ab von zahlreichen Größen, darunter von der Temperaturerhöhung selbst, so daß schon deswegen die Temperaturerhöhung im allgemeinen nicht proportional zum Quadrat der Stromstärke oder der Klemmenspannung sein kann. Im folgenden wird der Wärmeübergang zahlenmäßig mit Hilfe der von NUSSELT gegebenen Grundlagen bestimmt und es werden Empfehlungen dafür gegeben, wie die Wärmeabgabe zweckmäßig analytisch angenähert wird.

Der lange, gerade, kreiszylindrische Draht (Stab, Rohr), dessen Wärmeabgabe betrachtet wird, liege waagrecht in einer gasförmigen oder flüssigen Substanz, die in endlicher Entfernung von der Oberfläche des Stabes unbewegt ist und überall und fortwährend die Temperatur  $T_0$  hat. Ist der Stab Wärmequelle, so entsteht in der Nachbarschaft seiner Oberfläche eine makroskopische (geordnete) Strömung, die für die Wärmeabgabe wesentlich ist (freie Konvektion). Der

Vorgang ist eine komplizierte Funktion vieler Veränderlicher. Bekanntlich hat NUSSELT 1915 [1] durch Ähnlichkeitsbetrachtungen an den Differentialgleichungen, die für die Substanz- und für die Wärmebewegung aufgestellt werden können, diese verwickelten Zusammenhänge klargelegt und durch eine eindeutige Funktion zwischen wenigen, definierten Variablen ausgedrückt; er hat die Zahlenwerte dieser Funktion aus den Ergebnissen von Versuchen bestimmt, die von verschiedenen Autoren unter verschiedenen Bedingungen angestellt worden sind, hat dadurch verlässliche Grundlagen für die Berechnung der Wärmeabgabe geschaffen.

Wir beschränken uns auf den stationären Zustand und betrachten ein Stabstück der Länge  $L$ , dem entlang in axialer Richtung keine Wärmebewegung sich geht.  $T_F$  sei der Mittelwert der Temperatur aller Oberflächenelemente dieses Stababschnittes,  $P$  seine gesamte Wärmeverlustleistung, abgesehen vom Strahlungsverlust,  $F$  seine Oberfläche. Mit der (mittleren) Temperaturerhöhung

$$\vartheta_F = T_F - T_0 > 0$$

definiert man dann üblicherweise durch

$$P = \alpha \vartheta_F F$$

eine Funktion  $\alpha$  vieler Veränderlicher, die (mittlere) Wärmeübergangszahl genannt wird. Es ist also

$$\frac{P}{F} = \alpha \vartheta_F = w$$

die (mittlere) Wärmeverlustleistung der Oberfläche pro Einheit. Ist  $\alpha$  oder  $w$  zahlenmäßig bekannt, so kann



ese Größe entweder dazu dienen, um bei gegebener Temperaturerhöhung die Abkühlungsleistung zu bestimmen, oder sie kann dazu benutzt werden, um die Temperaturerhöhung des Stabes zu ermitteln, wenn in ihm entwickelte Wärmeleistung bekannt ist; diese Aufgabe liegt im besonderen bei Drähten und Leuchten aus Metall vor, die von elektrischem Strom durchflossen werden.

Es sei nun  $d$  der Durchmesser des Zylinders, die spezifische Schwerkraft an der Erdoberfläche<sup>1</sup>,  $\rho$  die Dichte (die Masse der Raumeinheit),  $\gamma = \rho g$ , weiter  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit,  $c_p$  die spezifische Wärme der Masseinheit bei konstantem Druck,  $\beta$  der Ausdehnungskoeffizient,  $\eta$  die Zähigkeit. Dann läßt sich<sup>2</sup> das Ergebnis NUSSELTs so aussprechen: Es ist

$$\alpha = \frac{w}{\vartheta_F} = \frac{\lambda_m}{d} \cdot \Phi \left( \frac{d^3 \gamma_m^2 \beta_m \vartheta_F}{g \eta_m^2} \cdot \frac{\eta_m c_{pm}}{\lambda_m} \right) \quad (4)$$

die bekannte Funktion. Wir schreiben sie abkürzungsweise

$$A = \Phi(B/C) \quad (5)$$

mit den Kenngrößen<sup>3</sup>

$$B = \frac{d^3 \gamma_m^2 \beta_m \vartheta_F}{g \eta_m^2}, \quad C = \frac{\lambda_m}{\eta_m c_{pm}}. \quad (6)$$

Setzt man für die fünf Stoffgrößen die Werte ein, die für  $T_0$  bestehen, so ergibt die Gl.(4) den Grenzwert  $\alpha_0$ , der für sehr kleine Temperaturerhöhungen  $\gg T_0$  gilt. Für größere Temperaturerhöhungen sind Mittelwerte der temperaturabhängigen Stoffgrößen  $\bar{\rho}, \bar{\lambda}, \bar{c}_p, \bar{\beta}, \bar{\eta}$  definiert und zu berechnen nach

$$\mu_m = \frac{1}{\vartheta_F} \int_{T_0}^{T_F} \mu(T) \cdot dT; \quad (7)$$

also z.B. die Stoffgröße  $\mu$  zwischen  $T_0$  und  $T_F$  eine mittlere Funktion von  $\vartheta$ , so ist  $\mu_m$  der Wert, den  $\mu$  im algebraischen Mittelwert der absoluten Temperatur  $(T_F + T_0)/2 = \vartheta_F/2$  aufweist. Für Gase ist die Zahl  $C = \lambda/\eta c_p$  eine temperaturunabhängige Konstante<sup>4</sup>, und der Ausdehnungskoeffizient

$$\beta_m = \frac{1}{T_m} = \int_{T_0}^{T_F} \frac{dT}{T} = \frac{\ln(T_F/T_0)}{T_F - T_0}. \quad (8)$$

Abb.1 ist mit (a) der von NUSSELT 1929 angegebene Verlauf der Funktion Gl.(5) bezeichnet. Hier nähert sich offenbar  $A$  für  $B/C < 10^{-5}$  einem konstanten Wert  $k$ :

$$\frac{\alpha d}{\lambda_m} \rightarrow k \approx 0,445; \quad B/C < 10^{-5}. \quad (9)$$

Für  $B/C > 10^4$  kann nach NUSSELT die Funktion nach dem Potenzgesetz

$$A = 0,502 \sqrt[4]{B/C}; \quad B/C > 10^4 \quad (10)$$

<sup>1</sup> Normwert  $g_N = 980,66 \frac{\text{dyn}}{\text{g}} = 980,66 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ .

<sup>2</sup> wenn man in der Differentialgleichung der Stoffbewegung die Trägheitsglieder gegen das Zähigkeitsglied vernachlässigt, also „schleichende“ Stoffbewegung annimmt, was leuchtet.

<sup>3</sup> Bezeichnungen  $A, B, C$  nach NUSSELT a.a.O. — NUSSELTsche Kennzahl  $Nu$ ,  $B$  GRASHOFsche Kennzahl  $Gr$ , PRANDTLsche Kennzahl  $Pr$ .

<sup>4</sup> Z. B. für Luft  $C = 1,42$  nach NUSSELT a. a. O.

angenähert werden. Eine von RICE [2] angegebene Näherung

$$A = 0,472 \sqrt[4]{B/C} \quad (10a)$$

ist als Kurve (b) eingetragen<sup>1</sup>; die Kurve (c) wird von McADAMS [3] als die Kurve empfohlen, die die Versuchsergebnisse von 15 Autoren am besten ausgleicht. Für (c) werden nicht NUSSELTsche Mittelwerte [Gl.(7), (8)] vorausgesetzt, sondern algebraische.

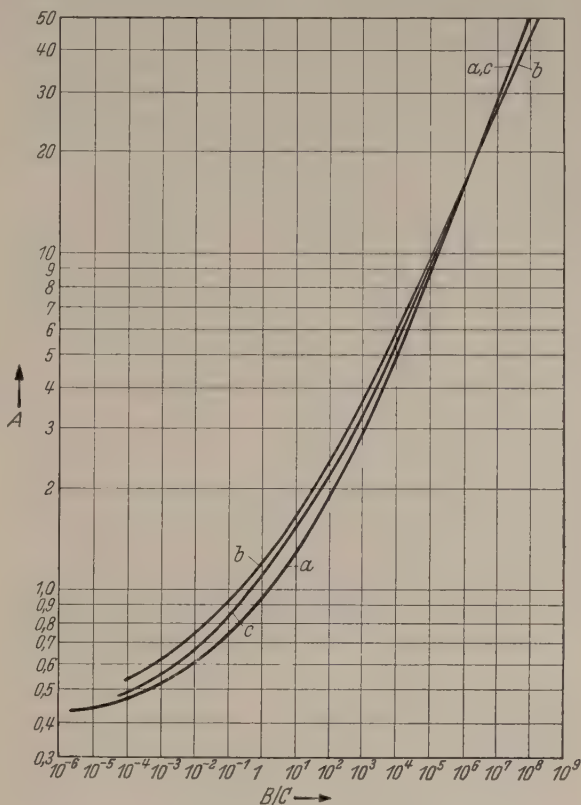


Abb.1. NUSSELTs Funktion  $A = \Phi(B/C)$ .  
a Kurve von NUSSELT (1929), b Näherung von RICE (1924),  
c Kurve von McADAMS (1933).

Für  $B/C > 10^4$  ist also nach Gl.(10) z.B.  $\alpha$  und  $w$  proportional zu  $d^{-1/4}$ , daher  $P$  proportional zu  $d^{3/4}$ ; für  $B/C < 10^{-5}$  ist

$$\alpha = \frac{w}{\vartheta_F} = \frac{k \lambda_m}{d}, \quad P = \pi L k \lambda_m \vartheta_F, \quad (11)$$

hier ist also die Wärmeleitfähigkeit der einzige Stoffwert der umgebenden Substanz, der auf die Wärmeabgabe Einfluß hat<sup>2</sup>,  $\alpha$  ist von der Temperaturerhöhung nicht abhängig und umgekehrt proportional zum Durchmesser, daher ist die gesamte Wärmeverlustleistung  $P$  proportional zur Temperaturerhöhung und unabhängig vom Durchmesser.

Beschränkt man sich auf ein bestimmtes Gas, so kann man mit Gl.(4) und Abb.1 die Wärmeabgabe zahlenmäßig bestimmen, wenn man die Eigenschaften des Gases kennt. Sie ist dann nach Gl.(4) eine Funktion allein der Temperaturerhöhung des Stabes

<sup>1</sup> Nach HERMANN [5] entspricht den Messungen mit Luft am besten  $A = 0,422 \sqrt[4]{B/C}$ .

<sup>2</sup> Die Genauigkeit, mit der die Temperaturabhängigkeit von  $\lambda$  bekannt ist, bestimmt unmittelbar die Genauigkeit, mit der die Wärmeabgabe bestimmt werden kann. Je kleiner  $\lambda$ , um so kleiner wird der Wärmeverlust.



und seines Durchmessers:

$$w = w(\vartheta, d), \quad \alpha = \frac{w}{\vartheta} = \alpha(\vartheta, d). \quad (12)$$

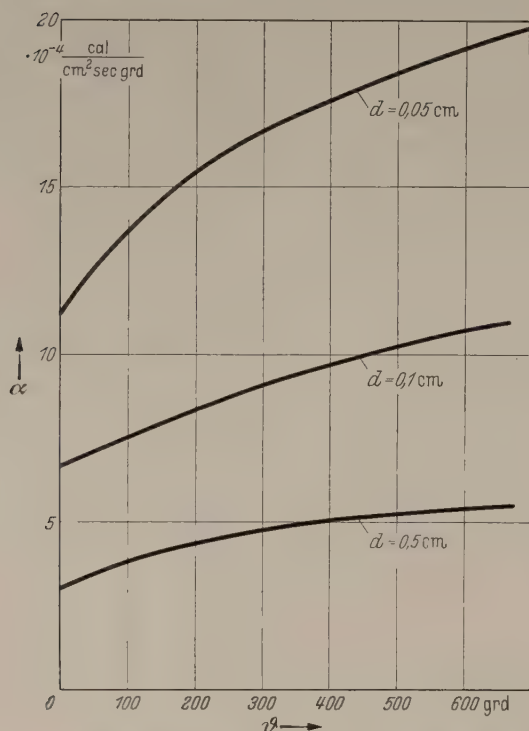


Abb. 2. Wärmeübergangszahl als Funktion von Temperaturerhöhung und Drahtdurchmesser.

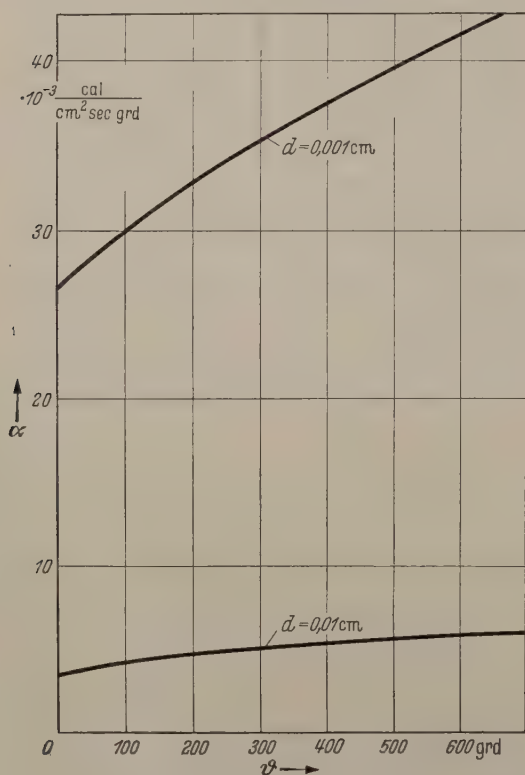


Abb. 3. Wärmeübergangszahl als Funktion von Temperaturerhöhung und Drahtdurchmesser.

Wir bezeichnen von hier an mit  $\vartheta$  die in Gl.(1) bestimmte Temperaturerhöhung des Stabes.

Auf diese Weise wurden die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  und die spezifische Wärmeabgabe  $w$  von Runddrähten

in ruhender Luft von Normalzustand ( $T_0 = 293$  g abs., Druck 1 Atm) für Durchmesser  $d$  von  $0,5$  cm  $1 \cdot 10^{-4}$  cm in Abhängigkeit von der Drahttemperatur  $\vartheta$  berechnet: Abb. 2 bis 7<sup>1</sup>.

Die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  steigt hiernach ganzen untersuchten Durchmesserbereich mit wachsender Stabtemperatur  $\vartheta$  von einem Anfangswert an monoton und etwas schwächer als proportional zu  $\vartheta^2$ . Will man eine bestimmte Kurve  $\alpha(\vartheta)$  durch eine ganze rationale Funktion annähern:

$$\alpha(\vartheta) = c_0 + c_1 \vartheta + c_2 \vartheta^2 + \dots, \quad (13)$$

so ist sonach  $c_0 = \alpha_0$  die Nullpunktsordinate und  $c_1$  durch die Nullpunktstangente gegeben, die Glieder

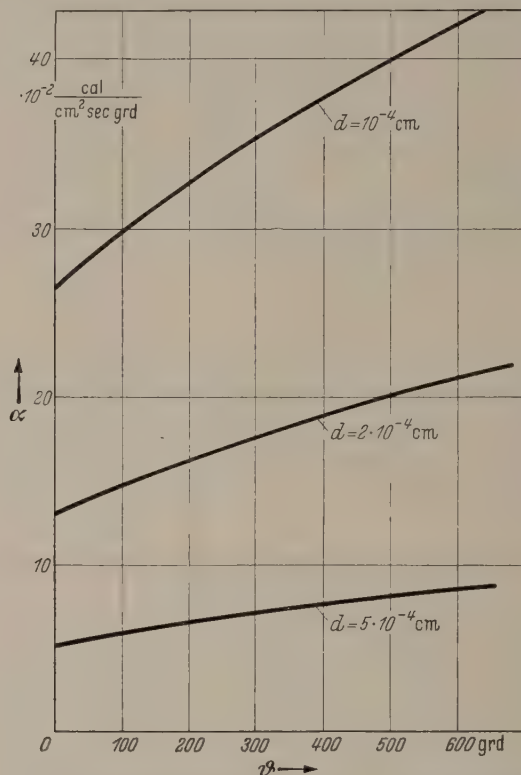


Abb. 4. Wärmeübergangszahl als Funktion von Temperaturerhöhung und Drahtdurchmesser.

höheren Grades bringen die Abweichung vom linearen Verlauf zum Ausdruck. Man wird also im allgemeinen mindestens einen dreigliedrigen Ausdruck benutzen. — Die Wärmeübergangszahl  $\alpha_0$  bei verschwindender Temperaturerhöhung nimmt mit abnehmendem Durchmesser  $d$  beschleunigt zu, wie Abb. 7 zeigt. Für  $d < 10^{-3}$  cm wird  $B/C < 10^{-5}$  und es gilt Gl.(1). Verringerung des Drahtdurchmessers verkleinert den Wärmeverlust nicht mehr.

Die spezifische Wärmeabnahme  $w$  verläuft nach Abb. 5 und 6 in dem ganzen untersuchten Bereich in Abhängigkeit von  $\vartheta$  monoton und steigt etwas stärker an als proportional zu  $\vartheta$ . Die Nullpunktstangente ist  $\alpha_0$ . Bei diesem besonders einfachen Verhalten genügt zur näherungsweisen analytischen Erfassung häufig ein dreigliedriger Ausdruck

$$w(\vartheta) = \alpha_0 \vartheta + a_2 \vartheta^2 + a_3 \vartheta^3 \quad (14)$$

mit befriedigender Genauigkeit in verhältnismäßig

<sup>1</sup> Die berechneten Werte  $\alpha_0$  für  $\vartheta = 0$  sind als Extrapolationen aufzufassen, Vgl. Gl. (9).

<sup>2</sup> Dieser Verlauf ist z. B. auch an Heizrohren beobachtet worden, die waagrecht in ruhender Luft liegen [4].

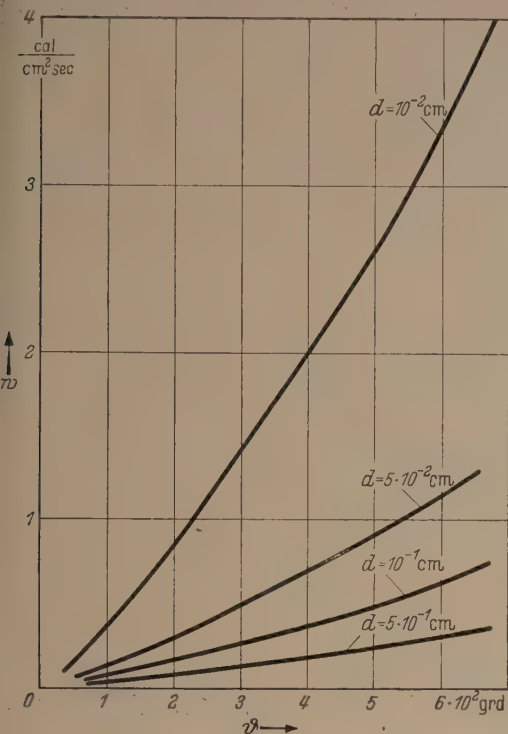


iten Bereichen<sup>1</sup>. Wie die Erfahrung zeigt, kommt n in vielen Fällen sogar aus mit der einfachen geraden Funktion

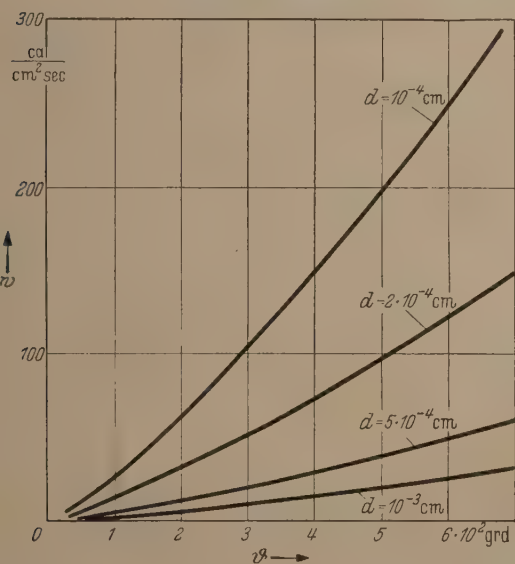
$$w(\vartheta) = \alpha_0 \vartheta + \alpha_3 \vartheta^3; \quad \alpha_3 > 0, \quad (15)$$

er mit dem quadratischen Ausdruck

$$w(\vartheta) = \alpha_0 \vartheta + \alpha_2 \vartheta^2; \quad \alpha_2 > 0. \quad (16)$$



5. Spezifische Wärmeabgabe als Funktion von Temperaturerhöhung und Drahtdurchmesser.



6. Spezifische Wärmeabgabe als Funktion von Temperaturerhöhung und Drahtdurchmesser.

darf nicht vergessen werden, daß die Genauigkeit, t der die empirischen Funktionen  $w(\vartheta)$  zahlenmäßig

<sup>1</sup>  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  bestimmt man z.B. aus den Koordinaten einer gewählter Punkte der empirischen Kurve  $w(\vartheta)$ . Man an auch Übereinstimmung der Nullpunktstangente, der ordinaten  $(w_1, \vartheta_1)$  eines gewählten Punktes und der angente  $w'_1$  in diesem Punkt fordern; dann ist

$$\alpha_2 = (3 w_1 - w'_1 \vartheta_1 - 2 \alpha_0 \vartheta_1) / \vartheta_1^2,$$

$$\alpha_3 = -(2 w_1 - w'_1 \vartheta_1 - \alpha_0 \vartheta_1) / \vartheta_1^3.$$

bestimmt werden können, beschränkt ist, denn auf sie nehmen alle Unsicherheiten Einfluß, mit denen die verschiedenen Eigenschaften des umgebenden Gases bekannt sind.

In Tabelle 1 sind Zahlenwerte für die zweigliedrigen Näherungen Gl.(15) und (16) angegeben.  $w$  ergibt sich in cal/sec cm<sup>2</sup>, wenn  $\vartheta$  in Grad C eingesetzt wird. Die Konstanten sind aus der Forderung bestimmt, daß die Näherung mit der empirischen Kurve (Abb.3) in der Nullpunktstangente und im Punkt  $\vartheta_1 = 500$  grad C übereinstimmen soll<sup>1</sup>.

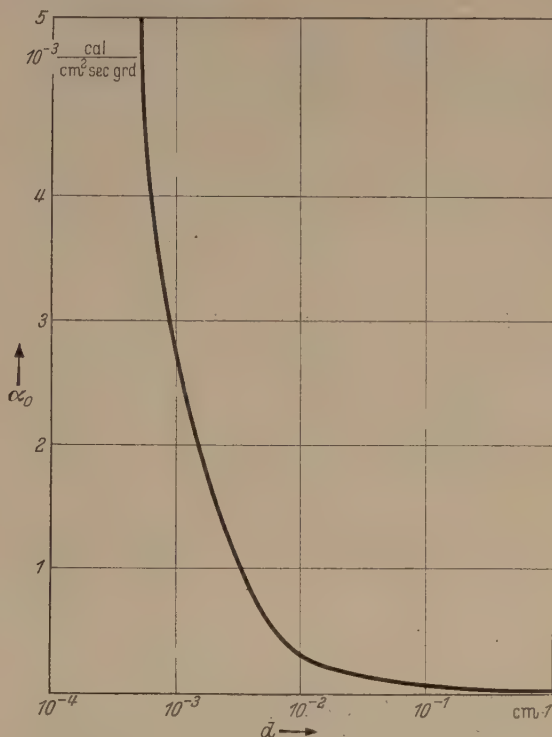


Abb. 7. Wärmeübergangszahl,  $\alpha_0$  für  $\vartheta \rightarrow 0$  als Funktion des Durchmessers.

Tabelle 1. Koeffizienten der zweigliedrigen Ausdrücke für die spezifische Wärmeabgabe  $w = \alpha_0 \vartheta + \alpha_2 \vartheta^2$  und  $w = \alpha_0 \vartheta + \alpha_3 \vartheta^3$  für Durchmesser  $d = 5 \cdot 10^{-1}$  cm bis  $1 \cdot 10^{-4}$  cm.  $\vartheta$  Temperaturerhöhung über 20 grad C in grad (hundertt. Grad),  $w$  in cal/cm<sup>2</sup>sec.

$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{\alpha_0}{\text{cal/sec cm}^2 \text{ grad}}$	$\frac{\alpha_2}{\text{cal/sec cm}^2 \text{ grad}^2}$	$\frac{\alpha_3}{\text{cal/sec cm}^2 \text{ grad}^3}$
$5 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$3,8 \cdot 10^{-7}$	$0,76 \cdot 10^{-9}$
$1 \cdot 10^{-1}$	$6,7 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$1,24 \cdot 10^{-9}$
$5 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-9}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-6}$	$6,8 \cdot 10^{-9}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$2,65 \cdot 10^{-2}$	$2,28 \cdot 10^{-5}$	$4,56 \cdot 10^{-8}$
$5 \cdot 10^{-4}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$4,6 \cdot 10^{-5}$	$9,2 \cdot 10^{-8}$
$2 \cdot 10^{-4}$	0,135	$1,14 \cdot 10^{-4}$	$2,28 \cdot 10^{-7}$
$1 \cdot 10^{-4}$	0,265	$2,52 \cdot 10^{-4}$	$5,04 \cdot 10^{-7}$

Vergleicht man in jedem dieser Ausdrücke die Koeffizienten beider Glieder miteinander, so findet man mit verhältnismäßig geringer Streuung, daß dieses Verhältnis überall dasselbe, sonach eine vom Durchmesser  $d$  unabhängige Konstante ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_0}{\alpha_2} &\approx 1 \cdot 10^3 \text{ grad C} = \text{const}_d, \\ \frac{\alpha_0}{\alpha_3} &\approx 0,5 \cdot 10^6 (\text{grad C})^2 = \text{const}_d, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$^1 \alpha_2 = (w_1 - \alpha_0 \vartheta_1) / \vartheta_1^2, \quad \alpha_3 = (w_1 - \alpha_0 \vartheta_1) / \vartheta_1^3.$$



mit anderen Worten: die Funktion  $w$  der zwei Variablen  $\vartheta$  und  $d$  ist im Grade dieser Näherung das Produkt zweier Faktoren, deren erster, hier  $\alpha_0$ , nur vom Durchmesser  $d$ , aber nicht vom der Stabtemperatur  $\vartheta$  abhängt, und deren zweiter, hier entweder  $\vartheta \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \vartheta\right)$  oder  $\vartheta \left(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_0} \vartheta^2\right)$ , nur von der Temperatur  $\vartheta$ , aber nicht vom Durchmesser  $d$  abhängt:

$$w(\vartheta, d) = \varphi_1(d) \cdot \varphi_2(\vartheta). \quad (18)$$

Es liegt auf der Hand, daß diese Eigenschaft der spezifischen Wärmeabgabe (der Wärmeübergangszahl) für Erwärmungsberechnungen von Bedeutung ist. Wir suchen sie daher auch theoretisch zu stützen. Das gelingt, wenn man näherungsweise annehmen kann, daß die Funktion Gl.(5) eine einfache Potenzfunktion ist, etwa  $A = \text{const} \cdot (B/C)^v$ , entsprechend Gl.(10), (10a). Dann folgt ja aus Gl.(4) die spezifische Wärmeabgabe

$$w = \text{const} \cdot d^{3v-1} \left( \frac{\gamma_m^2 \beta_m c_{pm}}{g \eta_m} \right)^v \lambda_m^{1-v} \cdot \vartheta^{1+v} = \varphi_1(d) \cdot \varphi_2(\vartheta) \quad (19)$$

als ein Produkt aus zwei Faktoren in Übereinstimmung mit Gl.(18), und für den anderen Grenzfall Gl.(9) der Funktion ist dasselbe Verhalten schon in Gl.(11) gezeigt worden:  $w = k \lambda_m \cdot \vartheta/d$ .

Die Folgerungen, die aus den NUSSELTschen Grundlagen gezogen werden können, und daher auch die Zahlenwerte und Zusammenhänge, die hier gefunden worden sind, können natürlich nur zutreffen, wenn die vorausgesetzten Ähnlichkeitsbedingungen der Strömungsfelder einerseits, der Temperaturfelder andererseits eingehalten sind. Werden sie verletzt, so wird die Wärmeabgabe verändert. Dies wird z.B. der Fall sein können, wenn ein dünner, erwärmter Draht mechanische Schwingungen ausführt.

Zu der hier behandelten Wärmeabgabe durch Konvektion tritt noch der Strahlungsverlust, der bekanntlich gleichfalls durch eine ganze rationale Funktion der Temperatur beschrieben wird. Um ihn zusammen mit dem Konvektionsverlust zu erfassen, kann man also z.B. einfach den Ausdruck (13) oder (14) entsprechend ergänzen.

**Literatur.** [1] NUSSELT, W.: Gesundh.-Ing. 38, 47 (1915); Z. VDI 73, 1475 (1929). — [2] RICE, CH. W.: Trans. Amer. Inst. Engr. 43, 1141 (1924). — [3] McADAMS, W. H.: Heat transmission, New York u. London 1933 und 2. Aufl. 1942. — [4] HEILMANN, R. H.: Ind. Engng. Chem. 16, 48 (1924); KOCH, W.: Beihefte z. Gesundh.-Ing. 1927, Reihe Heft 22; HERMANN, R.: Phys. Z. 33, 425 (1932); 34, 211 (1933); VDI — Forschungsh. 379 (1936). — SENFTLEBEN, H.: angew. Phys. 3, 361 (1951) (während der Korrektur der vorliegenden Abhandlung erschienen).

Prof. Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER  
(17a) Karlsruhe, Schirmerstr. 6.

## Ionen und Elektronen einheitlicher Anfangsgeschwindigkeiten im Vakuum.

Von F. WENZL, München.

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 29. Oktober 1951.)

### Bezeichnungen und Abkürzungen:

Gegeben seien in ebener Anordnung eine „Kathode“, von der Elektronen einheitlicher Anfangsgeschwindigkeit ausgehen, und eine „Anode“, von der positive Ionen einheitlicher Anfangsgeschwindigkeit ausgesandt werden.

$e$	Elementarladung
$\Delta$	Dielektrizitätskonstante des Vakuums
$x = 0$	Kathode
$x = d (\leq 0)$	Anode
$U(x)$	Potential gegenüber der Kathode
$U_d = U(d)$	Spannung zwischen Kathode und Anode
$E = -\frac{dU}{dx}$	Elektrische Feldstärke
$E_0$	Maximaler Betrag der elektrischen Feldstärke
$m; M$	Masse
$e \cdot U_K; e \cdot V_K$	Kinetische Energie an der Kathode
$e \cdot U_A; e \cdot V_A$	Kinetische Energie an der Anode
$i_n; i_p$	Stromdichte (von der Kathode bzw. von der Anode her positiv gerechnet)
$b = \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot i_n; a = \sqrt{\frac{M}{2e}} \cdot i_p$	„Reduzierter Strom“
$\lambda = a : b$	Verhältnis der reduzierten Ströme

für Elektronen bzw. Ionen

$$I^* \equiv I_K^* = \frac{9}{4\Delta} U_K^{-3/2} d^2 b \quad \text{„Normierter Elektronenstrom“ auf die Kathode bezogen}$$

$$I_A^* = \frac{9}{4\Delta} U_A^{-3/2} d^2 b \quad \text{„Normierter Elektronenstrom“ auf die Anode bezogen}$$

$$\cos^2 \tau = U_K : U_A \quad \text{bzw.} = U_A : U_K;$$

$$\text{tg}^2 \tau = U_d : U_K \quad \text{bzw.} = -U_d : U_A$$

$$U_{\min} \cdot e \quad \text{Minimum der kinetischen Energie der Elektronen zwischen Kathode und Anode}$$

$$u_{\min} = U_{\min} : U_A \quad \text{bzw.} = U_{\min} : U_K$$

$$F\left(\varphi; \frac{k_0}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^\varphi \left(1 - \frac{k_0^2}{2} \sin^2 \psi\right)^{-1/2} d\psi$$

1. LEGENDRESCHES elliptisches Normalintegral

$$E\left(\varphi; \frac{k_0}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^\varphi \left(1 - \frac{k_0^2}{2} \sin^2 \psi\right)^{1/2} d\psi$$

2. LEGENDRESCHES elliptisches Normalintegral

$$F\left(\frac{\pi}{2}; \frac{k_0}{\sqrt{2}}\right) = K\left(\frac{k_0}{\sqrt{2}}\right); E\left(\frac{\pi}{2}; \frac{k_0}{\sqrt{2}}\right) = E_{\text{vollst.}}\left(\frac{k_0}{\sqrt{2}}\right)$$

Vollständige elliptische Normalintegrale.

In mehreren Arbeiten haben H. ROTHE und V. KLEEN theoretisch und experimentell die Erscheinungen behandelt, die auftreten, wenn von einer Elektrode



de, die im folgenden durchweg als Kathode bezeichnet sei, Elektronen homogener Anfangsgeschwindigkeit in Richtung auf eine zweite Elektrode, die „Anode“, ausgesandt werden (die Art und Weise, wie diese Elektronen ihre Anfangsgeschwindigkeit bekommen haben, soll hier außer Betracht bleiben). Im folgenden handelt es sich dabei um das Auftreten einer virtuellen Kathode<sup>1</sup> zwischen den Elektroden, d. h. an einer Stelle, an der ein Teil der Elektronen *umkehrt*, um zur Kathode zurückzufliegen. Wie sich diese Verhältnisse ändern, wenn gleichzeitig von der Anode (positive) Ionen homogener Anfangsgeschwindigkeit (die auch Null sein kann) ausgehen, soll im folgenden untersucht werden<sup>1</sup>. Alle Rechnungen sind dabei für den Fall einer ebenen Anordnung durchgeführt, wie es auch bei ROTHE und KLEEN [1] der Fall ist. In dieser Annahme ist allerdings wegen der großen Raumladungen, die dabei auftreten können, und wegen damit verbundenen Randstörungen eine Vereinfachung enthalten, die bedenklich erscheinen mag. Nun hat sich aber ebenfalls für den Fall reiner Elektronenströmung gezeigt [5], daß Theorie und Experiment teilweise weit über das Qualitative hinaus recht gut übereinstimmen, auch wenn man die Theorie *ohne* Randstörungen ansetzt. Ganz entsprechend wird man daher annehmen dürfen, daß auch bei Elektronen *und* Ionen die Annahme ebener Anordnung einen brauchbaren Überblick über die Erscheinungen erlaubt, die in diesem Zusammenhang auftreten können.

Längere Zwischenrechnungen sind im allgemeinen nur soweit wiedergegeben, als es zum Verständnis des Gedankenganges nötig schien.

### 1. Rechnerische Grundlagen.

Mit den eingangs zusammengestellten Bezeichnungen ist die Spannung  $U_d$  zwischen Kathode und Anode gegeben durch

$$U_d = U_A - U_K = V_K - V_A \quad (1.1)$$

0, je nachdem  $U_A \geq U_K$ , je nachdem also die Elektronengeschwindigkeit an der Anode oder an der Kathode größer ist, d. h. je nachdem die „Anode“ positiv oder negativ gegenüber der „Kathode“ ist). Für das Potential  $U(x)$  zwischen  $x = 0$  (Kathode) und  $x = d$  (Anode) erhält man dann auf Grund der Festsetzungen  $U(0) = 0$  und  $E = -\frac{dU}{dx}$  (so daß größere Elektronengeschwindigkeiten dem größeren Potential entsprechen) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{1}{\Delta} \left( \frac{a}{\sqrt{V_K - U}} - \frac{b}{\sqrt{U + U_K}} \right), \quad (1.2)$$

$$\frac{a}{\sqrt{V_K - U}} = i_p \sqrt{\frac{M}{2e(V_K - U)}}$$

die Dichte der positiven Ionen an der Stelle  $x$  und

$$\frac{b}{\sqrt{U + U_K}} = i_n \sqrt{\frac{m}{2e(U + U_K)}}$$

die Dichte der Elektronen an derselben Stelle gibt.

<sup>1</sup> Eine ähnliche Fragestellung findet sich bei W. O. SCHUMANN [2]. Neuerdings ist auch mehrfach die Frage behandelt worden, wie virtuelle Kathoden und allzu große Potentialdifferenzen durch Rest-Ionen, die auch bei gutem Vakuum nicht ganz fehlen, unter Umständen vermieden werden können ([3]; [4]). Hierauf soll aber im folgenden nicht näher eingegangen werden.

Aus (1.2) folgt durch einmalige Integration

$$E^2 = \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 = \frac{4}{1} \cdot [a \sqrt{V_K - U} + b \sqrt{U + U_K} - c] \quad (1.3)$$

mit der Integrationskonstanten  $c$ .

Wir betrachten nun solche Fälle, in denen  $E = 0$  werden kann. Da  $a$  und  $b$  beide (als reduzierte, positiv gerechnete Ströme) positiv sind, ist dazu notwendig  $c \geq 0$ . Andererseits ist das Maximum der eckigen Klammer in (1.3), als Funktion von  $U$  betrachtet, gegeben durch den Wert

$$\frac{\Delta \cdot E_0^2}{4} = \sqrt{(a^2 + b^2)(V_K + U_K)} - c. \quad (1.4)$$

Da die linke Seite nicht negativ werden kann, gilt dasselbe auch für die rechte Seite. Unter Berücksichtigung der bereits aufgestellten Forderung  $c \geq 0$  ist also notwendig

$$0 \leq c \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(V_K + U_K)}. \quad (1.5)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$Y = \frac{\Delta}{4} \cdot E^2 + c; \quad dY = \frac{\Delta}{2} \cdot E dE, \quad (1.6)$$

so ergibt sich aus (1.3) für  $U$  die quadratische Gleichung

$$U^2 \cdot (a^2 + b^2)^2 + 2U \cdot [Y^2 \cdot (a^2 - b^2) + (b^2 \cdot U_K - a^2 V_K) \cdot (a^2 + b^2)] + [Y^4 - 2Y^2 \cdot (a^2 V_K + b^2 U_K) + (b^2 U_K - a^2 V_K)^2] = 0.$$

Ihre Lösungen sind

$$U = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \cdot [Y^2 \cdot (b^2 - a^2) + (a^2 V_K - b^2 U_K)(a^2 + b^2) \pm 2abY \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)(U_K + V_K - Y^2)}] \quad (1.7)$$

Unter Berücksichtigung von (1.6) folgt

$$dx = -\frac{dU}{E} = -\frac{dU}{\frac{\Delta}{2} \cdot E} \cdot \frac{\Delta}{2} dE \quad (1.8)$$

Damit ist unter Berücksichtigung von (1.7) und (1.6) die Lösung auf ein elliptisches Integral zurückgeführt.

Mit  $E_0 = \text{Max. } |E|$  (vgl. (1.4)) setzen wir nun

$$E = E_0 \cos \varphi. \quad (1.9)$$

Ferner sei zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} C &= \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (V_K + U_K)}; \\ k_0^2 &= 1 - \frac{c}{C} = \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{E_0^2}{C}^* ; \quad k_0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Aus (1.6) folgt dann  $Y = C(1 - k_0^2 \sin^2 \varphi)$  und nach (1.7) bei geeignetem Vorzeichen von  $\varphi$

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1 + (U_K + V_K) \\ &\times \left[ \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot (1 - k_0^2 \sin^2 \varphi)^2 \right. \\ &\left. + \frac{2ab}{b^2 + a^2} \cdot k_0 \sin \varphi (1 - k_0^2 \sin^2 \varphi) \cdot \sqrt{2 - k_0^2 \sin^2 \varphi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

oder

$$U = U_1 + (U_K + V_K) \times \left[ \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \cdot (1 - \eta^2)^2 + \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \cdot \eta (1 - \eta^2) \cdot \sqrt{2 - \eta^2} \right], \quad (1.11a)$$

\* nach (1.4)



wobei

$$U_1 = \frac{a^2 V_K - b^2 U_K}{a^2 + b^2}; \quad \lambda = \frac{a}{b}; \quad \eta_1 = k_0 \cdot \sin \varphi. \quad (1.11b)$$

Durch Integration von (1.8) unter Berücksichtigung von (1.9) und (1.11) folgt außerdem

$$x = x_1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{A} \cdot (U_K + V_K)^{3/4}}{(a^2 + b^2)^{1/4}} \times \left[ \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \cdot \xi_1(k_0; \varphi) + \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \cdot \xi_2(k_0; \varphi) \right] \quad (1.12)$$

mit  $x_1$  als Integrationskonstante und

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(k_0; \varphi) &= 3k_0 \cdot (1 - k_0^2) \cdot \cos \varphi + k_0^3 \cdot \cos^3 \varphi; \\ \xi_2(k_0; \varphi) &= \frac{k_0^2}{2} \cdot \sin 2\varphi \cdot \sqrt{2 - k_0^2 \sin^2 \varphi} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left[ 8(1 - k_0^2) \cdot E\left(\varphi; \frac{k_0}{\sqrt{2}}\right) \right. \\ &\quad \left. - (5 - 4k_0^2) \cdot F\left(\varphi; \frac{k_0}{\sqrt{2}}\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.12a)$$

wobei  $F\left(\varphi; \frac{k_0}{\sqrt{2}}\right)$  und  $E\left(\varphi; \frac{k_0}{\sqrt{2}}\right)$  das 1. bzw. 2. LEGENDREsche Normalintegral mit dem Modul  $k = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot k_0$  bedeuten.

Die Probe durch Differétiation von (1.12) unter Berücksichtigung von (1.9) und (1.11) ergibt die erforderliche Übereinstimmung mit (1.8).

Für die Stelle  $\varphi = 0$ , an der die Feldstärke ihren größten Betrag und daher  $U(x)$  einen Wendepunkt hat, folgt aus (1.11) das Potential

$$U_W = \frac{b^2 V_K - a^2 U_K}{a^2 + b^2}. \quad (1.13)$$

Es liegt, wie es nach (1.2) sein muß, im Intervall  $(-U_K; V_K)$ .

Nun seien die Vorzeichen der Wurzeln überall positiv genommen, wenn nichts anderes angegeben ist. Dann folgt durch Einsetzen von  $U = U_W$  in (1.3), daß für  $\varphi = 0$  auch die Gleichung (1.3) vorzeichenrichtig erfüllt ist. Aus Stetigkeitsgründen gilt dasselbe für wachsenden Betrag von  $\varphi$ , solange keine der Wurzeln auf der rechten Seite von (1.3) verschwindet<sup>1</sup>;  $U = V_K$  und  $U = -U_K$  bedeuten aber nach (1.2) auf alle Fälle bereits „natürliche Grenzen“ für die Gültigkeit unserer Lösungen, da dort die positive oder negative Raumladung unendlich wird.

Wir fassen zusammen: In den Gleichungen (1.9), (1.11) und (1.12) ist eine Parameterdarstellung der drei wesentlichen Größen  $E$ ,  $U$  und  $x$  durch den Parameter  $\varphi$  gegeben. Die Hilfsgröße  $\varphi$  läßt sich immer als „transformierte Länge“ auffassen, wie man folgendermaßen erkennt: Nach (1.9), (1.11b) und (1.11a) ist

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx}{dU} \cdot \frac{dU}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{-1}{E_0 \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{dU}{d\eta} \cdot k_0 \cos \varphi = \frac{-k_0}{E_0} \cdot \frac{dU}{d\eta}$$

mit

$$\frac{dU}{d\eta} = \frac{U_K + V_K}{1 + \lambda^2} \cdot \left[ -4\eta(1 - \eta^2) \cdot (1 - \lambda^2) + \frac{2(1 - 4\eta^2 + 2\eta^4) \cdot 2\lambda}{\sqrt{2 - \eta^2}} \right].$$

<sup>1</sup> Diese Vorzeichenbetrachtung ist notwendig, weil aus (1.3) zwar (1.7) folgt, weil aber umgekehrt (1.7) die ursprüngliche Gleichung (1.3) zunächst nur bis auf die Vorzeichen vor den Wurzeln auf der rechten Seite gibt.

Die eckige Klammer kann ihr Vorzeichen nur wechseln an den Nullstellen  $\eta = \eta_1$  und  $\eta = \eta_2$ , wobei

$$\eta_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}}; \quad \eta_2 = -\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}}. \quad (1.14)$$

(Berechnung dieser Werte, indem man etwa  $\eta^2 - 1 =$  setzt). Nach (1.11b) ist notwendig  $\eta^2 \leq k_0^2$  ( $\leq 1$  nach (1.10) und (1.5), weshalb Nullstellen mit  $|\eta| > 1$  von vornherein ausscheiden). Einer der Werte  $\eta_1$  bzw.  $\eta_2$  kann daher nur auftreten, wenn sein Betrag höchstens  $k_0$  ist<sup>1</sup>. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} U &= V_K \quad \text{für} \quad \eta = \eta_1 \quad \text{bzw.} \\ U &= -U_K \quad \text{für} \quad \eta = \eta_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Diese Werte von  $U$  geben aber genau die bereits erwähnten „natürlichen Grenzen“ für unsere Lösungen. Solange man keine dieser beiden Grenzen erreicht hat — im besonderen also, wenn es überhaupt keine „natürlichen Grenzen“ gibt, weil  $|\eta_1|$  und  $|\eta_2|$  größer als  $k_0$  wären<sup>2</sup> — hat man immer dasselbe (negative) Vorzeichen von  $dx/d\varphi$ , womit die Bezeichnung von  $\varphi$  als „transformierter Länge“ gerechtfertigt ist.

## 2. Periodische Lösungen.

Daß im Fall  $(\eta_1 > k_0; \eta_2 < -k_0)$  tatsächlich keine „natürlichen Grenzen“ für die Lösung auftreten sieht man folgendermaßen: Im Intervall  $\eta_2 < \eta < \eta_1$  hat  $dU/d\eta$  (ohne Rücksicht auf  $\eta = k_0 \sin \varphi$ ) immer dasselbe Vorzeichen; also können die aus  $\eta_2$  bzw.  $\eta_1$  folgenden „kritischen Werte“  $U = -U_K$  bzw.  $U = V_K$  nicht auch noch im Inneren dieses Intervalls angenommen werden, also erst recht nicht in Teilintervall  $-k_0 \leq \eta \leq k_0$ , in dem  $\eta$  nach (1.11b) für beliebige  $\varphi$  liegt. Nach der Bemerkung über „natürliche Grenzen“ im Anschluß an (1.13) ist daher für den Fall  $(\eta_1 > k_0; \eta_2 < -k_0)$  die Hilfsveränderliche  $\eta$  unbegrenzt veränderlich, ohne daß sich an der vorzeichenrichtigen Lösung der gegebenen Gleichungen etwas ändert. Dieser Fall sei nun genauer untersucht.

Nach (1.14) und (1.10) folgt aus  $\eta_1^2 \geq k_0^2$  bzw.  $\eta_2^2 \geq k_0^2$  die Ungleichung

$$1 + \lambda^2 \geq \frac{C^2}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\lambda^2} + 1 \geq \frac{C^2}{c^2}.$$

Soll beides zusammen gelten, so ist notwendig  $C^2 : c^2 \leq 2$ , weil keinesfalls zugleich  $\lambda$  und  $1/\lambda$  größer als 1 sein kann. Dies bedeutet für  $k_0$  die notwendige Bedingung

$$k_0^2 = 1 - \frac{c}{C} \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,293; \quad k_0 < 0,542. \quad (2.1)$$

In Abb. 1 ist der aus  $\eta_1 > k_0; \eta_2 < -k_0$  nach (1.14) folgende Bereich zulässiger  $k_0$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  dargestellt. Gehört das Paar  $k_0; \lambda$  zum schraffierten Bereich, so ist  $\varphi$  (und damit auch  $x$ ) unbegrenzt veränderlich. Dann hat nach (1.9) und (1.11) nicht nur die Feldstärke  $E$ , sondern auch das Potential  $U$  jeweils den gleichen Wert, wenn man  $\varphi$  um  $2\pi$  ver-

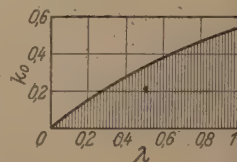


Abb. 1. Bereich der zulässigen  $k_0$ -Werte in Abhängigkeit von  $\lambda = a/b$ , wenn periodische Lösungen (ohne „natürliche Grenzen“) möglich sein sollen (dieselben  $k_0$  auch für  $1/\lambda$  statt  $\lambda$ ).

<sup>1</sup> Dies braucht keineswegs für  $\eta_1$  und  $\eta_2$  zugleich den Fall zu sein.

<sup>2</sup> Vgl. dazu den Anfang des folgenden Abschnitts.

<sup>3</sup> Zum Grenzfall des Gleichheitszeichens vgl. Abb. 5.



Öbert. Für  $x$  dagegen ergibt sich dabei aus (1.12) die Differenz

$$d_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{1 \cdot ab}}{(a^2 + b^2)^{5/4}} \cdot (U_K + V_K)^{3/4} \cdot 4 g(k_0) \quad (2.2)$$

mit

$$g(k_0) = 8 \xi_2 \left( k_0; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$2 \sqrt{2} \left[ 8(1 - k_0^2) \cdot E_{\text{vollst.}} \left( \frac{k_0}{\sqrt{2}} \right) - (5 - 4 k_0^2) K \left( \frac{k_0}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (2.2a)$$

bei  $E_{\text{vollst.}} \left( \frac{k_0}{\sqrt{2}} \right)$  bzw.  $K \left( \frac{k_0}{\sqrt{2}} \right)$  die vollständigen elliptischen Normalintegrale 2. bzw. 1. Gattung bedeuten (vgl. die eingangs zusammengestellten Bezeichnungen). und  $E$  sind daher (im vorliegenden Fall unbeschränkt veränderlicher Werte von  $\varphi$ ) *periodische Funktionen* von  $x$  mit der Periode  $d_0$ . Für  $k_0^2 < 0,3$  (was nach (2.1) bei periodischen Lösungen immer erfüllt ist) ergibt sich durch Reihenentwicklung nach Potenzen von  $k_0$  für die Funktion  $g(k_0)$  mit einem Fehler von höchstens 1% die Näherung

$$4g(k_0) = 3\pi\sqrt{2} \cdot \left( 1 - \frac{15k_0^2}{8} + \frac{105k_0^4}{256} \right) \cdot 1 \quad (2.2b)$$

Für die *Extremwerte* von  $U$  (an denen  $E = 0$ , also  $= \pm \frac{\pi}{2}$ ) folgt aus (1.11) unmittelbar

$$= U_1 + (U_K + V_K) \left\{ \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \cdot (1 - k_0^2)^2 \pm \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} k_0 (1 - k_0^2) \sqrt{2 - k_0^2} \right\}. \quad (2.3)$$

Die Differenz und damit die *Amplitude*<sup>2</sup> der Schwankungen des Potentials ist daher gegeben durch

$$U_\delta = (U_K + V_K) \cdot \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \cdot 2k_0 \cdot (1 - k_0^2) \cdot \sqrt{2 - k_0^2}. \quad (2.4)$$

Man nimmt  $2k_0 \cdot (1 - k_0^2) \cdot \sqrt{2 - k_0^2}$  monoton von 0 bis 1 zu, wenn  $k_0$  von 0 bis zu seinem in (2.1) angegebenen Höchstwert  $k_0 = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2}}$  ansteigt. Die Hilfsgröße  $k_0$ , nach (1.10) definiert durch

$$k_0^2 = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{E_0^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(U_K + V_K)}}, \quad (2.5)$$

läßt sich daher auch als (nicht ganz lineares) Maß für die Amplitude  $U_\delta$  auffassen, wenn das Verhältnis  $= \frac{a}{b}$  der reduzierten Ströme (und  $U_K + V_K$ ) gegeben ist. Bei festem  $\lambda$  und festem  $U_K + V_K$  folgt aus  $k_0 = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2}}$  im besonderen

$$(U_\delta)_{\text{max}} = (U_K + V_K) \cdot \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \leq U_K + V_K \quad (2.6)$$

weil immer  $2\lambda \leq 1 + \lambda^2$  wegen  $0 \leq (1 - \lambda)^2$ .

Der aus (2.2) und (2.4) folgende Zusammenhang zwischen der Periode ( $d_0$ ) und der Amplitude ( $U_\delta$ ) ist für  $a = b = 1$  in Abb. 2 dargestellt.

<sup>1</sup> Die aus (2.2) und (2.2b) für kleine  $k_0$  folgende Periode stimmt überein mit [2], (25), wenn man  $\frac{a}{\sqrt{V_K}} \approx \frac{b}{\sqrt{V_K}}$  (was für kleine Potentialschwankungen um  $U = 0$  notwendig ist) und abweichende Bezeichnungen berücksichtigt.

<sup>2</sup> Womit die ganze, nicht die halbe Differenz der Extremwerte gemeint ist.

<sup>3</sup> Diese obere Grenze folgt auch unmittelbar aus (1.2), damit die Wurzeln dort reell bleiben.

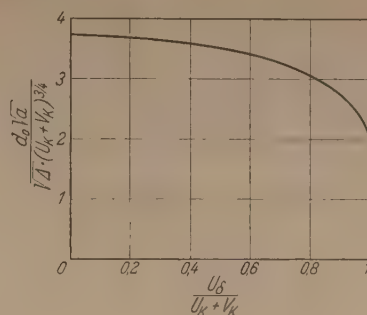


Abb. 2. Zusammenhang zwischen Periode ( $d_0$ ) und Amplitude ( $U_\delta$ ) räumlicher Potentialschwankungen im Fall  $\lambda = 1$  (d. h. bei gleichen reduzierten Strömen  $a = b$ ) nach (2.2) und (2.4).

(Mit  $k_0 = \sqrt{2} \cdot \sin \varphi$  ist nach (2.2a) und (2.4) wegen  $\lambda = 1$  einerseits

$$d_0 = \frac{\sqrt{2} \cdot (U_K + V_K)^{3/4}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{8}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot \xi_2 \left( \sqrt{2} \sin \varphi; \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{und andererseits}$$

$$U_\delta = (U_K + V_K) \cdot \sin 4\varphi.$$

### 3. Näherungen durch trigonometrische Funktionen.

Durch Entwicklung nach Potenzen von  $k_0$  ergeben sich für hinreichend kleine  $k_0$  (also für hinreichend kleine „Amplituden“  $U_\delta$ ) einfache Näherungen für den Potentialverlauf: Aus (1.11) und (1.13) folgt zunächst (wenn man Glieder mit höheren Potenzen als  $k_0^3$  wegläßt)

$$U = U_W - k_0^2 U_{II} + k_0 U_I \cdot \left( 1 - \frac{15}{16} k_0^2 \right) \sin \varphi + k_0^2 U_{II} \cos 2\varphi + \frac{5}{16} k_0^3 U_I \sin 3\varphi + \dots \quad (3.1)$$

mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} U_I &= \frac{2\sqrt{2}}{1 + \lambda^2} \cdot \lambda (U_K + V_K); \\ U_{II} &= \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \cdot (U_K + V_K). \end{aligned} \right\} \quad (3.1a)$$

Wir führen nun mittels

$$x - x_1 = -\frac{d_0}{2\pi} \cdot \xi \quad (3.2)$$

die Hilfsveränderliche  $\xi$  als *normierte Länge* ein. Aus (1.12), (2.2) und (2.2b) folgt dann, wenn man höhere Potenzen als  $k_0^2$  wegläßt,

$$\xi = \varphi + \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} \cdot \sqrt{2} \cdot k_0 \cos \varphi + \frac{15}{16} k_0^2 \cdot \sin 2\varphi + \dots, \quad (3.3)$$

also  $|\xi - \varphi| \ll 1$  für hinreichend kleine  $k_0$  und  $\lambda \neq 0$ . Mit  $\varepsilon = \xi - \varphi$  aus (3.3) kann man daher die Näherung

$$\sin \xi = \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) \sin \varphi + \varepsilon \cos \varphi \quad (3.3a)$$

und entsprechende Ansätze für  $\cos 2\xi$  und  $\sin 3\xi$  benutzen. Nach (3.3) ist dabei

$$\varepsilon = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} \cdot \sqrt{2} k_0 \cos \varphi + \frac{15}{16} k_0^2 \sin 2\varphi + \dots \quad (3.3b)$$

Macht man dann mit den unbestimmten Koeffizienten  $a_v$  und  $b_v$  den Ansatz

$$U = U_W + a_0 + b_1 \sin \xi + a_2 \cos 2\xi + b_3 \sin 3\xi, \quad (3.4)$$

so geht die rechte Seite mittels (3.3a) sowie der entsprechenden Gleichungen für  $\cos 2\xi$  und  $\sin 3\xi$  unter Verwendung von (3.3b) in eine Summe über, in der bis auf Glieder mit  $k_0^4$  und höheren Potenzen genau



dieselben trigonometrischen Funktionen  $\sin \varphi$ ;  $\cos 2\varphi$ ;  $\sin 3\varphi$  wie in (3.1) vorkommen. Durch Koeffizientenvergleich mit (3.1) folgt dann (Übereinstimmung bis  $k_0^3$  einschließlich) das Ergebnis

$$U = U_W \left. \begin{aligned} & - 3k_0^2 U_{II} + k_0 U_I \cdot \left[ 1 - k_0^2 \left( \frac{45}{32} + \gamma^2 \right) \right] \sin \xi \\ & - k_0^2 U_{II} \cos 2\xi - k_0^3 U_I \left( \frac{5}{32} + \gamma^2 \right) \sin 3\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

mit

$$\gamma = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda}.$$

Man hat damit den Anfang einer trigonometrischen Entwicklung des Potentials in Abhängigkeit von  $\xi$

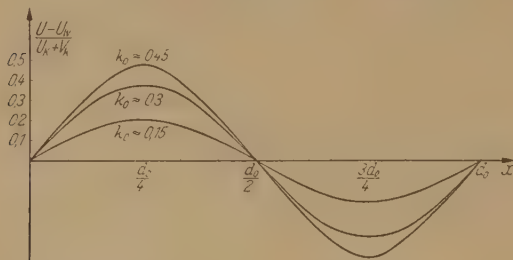


Abb. 3. Beispiele periodischer Potentialverteilung im Fall  $a = b$  (gleiche reduzierte Ströme). Bei  $k_0 = 0,15$  und  $k_0 = 0,3$  ergeben sich (bis auf unwesentliche Maßstabsfaktoren) noch keine merklichen Abweichungen vom sin-förmigen Verlauf; bei  $k_0 \approx 0,45$  sind die Extrema bereits schärfer ausgeprägt ( $k_0 \approx 0,54$  wäre nach Abb. 1 der größte hier zulässige  $k_0$ -Wert).

bzw.  $x$ . Besonders einfach (auch im Sinn symmetrischen Kurvenverlaufs) wird diese Abhängigkeit für

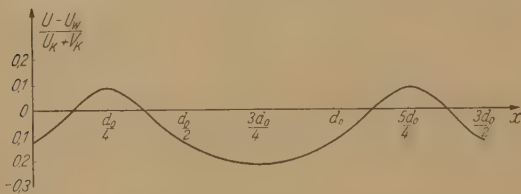


Abb. 4. Beispiel einer periodischen Potentialverteilung im Fall  $\lambda = a : b = 1 : 3$  ( $k_0 \approx 0,2$ ).

$a = b$  (gleiche „reduzierte Ströme“): Dann ist  $\lambda = 1$ ;  $\gamma = 0$  und

$$U = U_W + k_0 U_I \left( 1 - \frac{45}{32} k_0^2 \right) \sin \xi - k_0^3 U_I \cdot \frac{5}{32} \sin 3\xi. \quad (3.5a)$$

Abgesehen von der Bedeutung der Konstanten  $k_0$ , in die nach (1.10) die Integrationskonstante  $c$  eingeht, läßt sich die Entwicklung (3.5) bzw. (3.5a) auch unmittelbar aus der Differentialgleichung (1.2) gewinnen, indem man ihre rechte Seite nach Potenzen von  $U^* = U - U_W$  entwickelt, wobei  $U_W$

wieder dasselbe wie in (1.13) bedeuten soll. Man erhält dann

$$\frac{d^2 U^*}{dx^2} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2 b^2} \cdot \frac{(a^2 + b^2)^{5/2}}{(U_K + V_K)^{3/2}} \times \left[ U^* + 3 \cdot \sqrt{2} \gamma \cdot \frac{U^{*2}}{U_I} + \dots \right]. \quad (3.6)$$

Der zu (3.4) analoge Ansatz

$$U^* = a_0 + b_1 \sin \omega x + a_2 \cos 2\omega x + b_3 \sin 3\omega x \quad (3.7)$$

mit zunächst noch unbekannter Kreisfrequenz  $\omega$  führt dann wieder zum Ziel, wenn nur z.B.  $b_1$  hinreichend klein, aber im übrigen beliebig gegeben ist; man braucht nur (3.7) in (3.6) einzusetzen,  $\sin^2 \omega x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega x)$  usw. zu berücksichtigen und entsprechende Koeffizienten zu vergleichen.

Der hier angedeutete Weg könnte übrigens auch im Fall der Zylinder- bzw. Kugelsymmetrie als Ausgang zu einer Näherungslösung der entsprechenden Aufgabe dienen.

Zur Herleitung von (3.3) und (3.5) dienen die in (1.12a) folgenden Näherungen

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 3k_0 \cos \varphi \quad \text{und} \\ \xi_2 &= \frac{3}{4} \sqrt{2} \cdot \left[ \varphi \left( 1 - \frac{15}{8} k_0^2 \right) + \frac{15}{16} k_0^2 \sin 2\varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Sie gelten etwa bis  $k_0^2 = 0,1$ , d.h. nach (2.4) bis

$$U_0 \approx (U_K + V_K) \cdot \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \cdot 0,78 \quad \text{mit großer Genauigkeit, also auch noch bei Lösungen, die schon beträchtliche Potentialschwankungen aufweisen. Entsprechendes gilt in den zur Zeichnung herangezogenen Fällen}$$

$\lambda = 1$  (Abb. 3) und  $\lambda = \frac{1}{3}$  (Abb. 4; im Fall  $\lambda = \frac{1}{3}$  kommen für periodische Lösungen nach Abb. 1 nur solche  $k_0$  in Betracht, für die  $k_0 \leq 0,24$ ) auch für (3.3) und (3.5).

Für die Funktion  $\xi_2(k_0; \varphi)$  folgt anschließend eine Wertetafel; sie beschränkt sich auf den Bereich

$$0 \leq k_0 \leq \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad \text{in dem nach (2.1) alle periodischen Lösungen enthalten sind. Für die zur Berechnung benutzte Hilfsveränderliche } \psi \text{ (definiert durch } k_0 = \sqrt{2} \sin \psi) \text{ bedeutet dies } 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{8}.$$

$$\xi_2(k_0 = \sqrt{2} \sin \psi; \varphi)$$

$\varphi =$	$k_0 = 0,0$	$0,049$	$0,099$	$0,148$	$0,197$	$0,246$	$0,294$	$0,342$	$0,390$	$0,437$	$0,483$	$0,53$
$5^\circ$	0,093	0,093	0,093	0,093	0,093	0,092	0,092	0,092	0,092	0,092	0,092	0,09
$10^\circ$	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185	0,185	0,184	0,184	0,184	0,184	0,18
$15^\circ$	0,278	0,278	0,278	0,277	0,277	0,276	0,276	0,275	0,274	0,273	0,272	0,27
$20^\circ$	0,370	0,370	0,370	0,369	0,369	0,368	0,366	0,364	0,362	0,360	0,357	0,35
$25^\circ$	0,463	0,462	0,462	0,461	0,459	0,456	0,453	0,450	0,447	0,443	0,438	0,43
$30^\circ$	0,555	0,555	0,554	0,552	0,549	0,545	0,540	0,535	0,529	0,522	0,514	0,50
$35^\circ$	0,648	0,648	0,646	0,642	0,637	0,632	0,625	0,617	0,606	0,596	0,583	0,57
$40^\circ$	0,741	0,741	0,738	0,733	0,725	0,717	0,706	0,694	0,680	0,664	0,646	0,62
$45^\circ$	0,833	0,833	0,829	0,821	0,811	0,800	0,785	0,768	0,748	0,727	0,704	0,67
$50^\circ$	0,925	0,925	0,920	0,910	0,896	0,880	0,861	0,839	0,812	0,784	0,753	0,72
$55^\circ$	1,018	1,017	1,011	0,998	0,981	0,960	0,936	0,907	0,874	0,837	0,796	0,75
$60^\circ$	1,110	1,109	1,101	1,086	1,066	1,040	1,009	0,972	0,930	0,885	0,836	0,78
$65^\circ$	1,203	1,200	1,190	1,172	1,146	1,116	1,077	1,032	0,982	0,927	0,867	0,80
$70^\circ$	1,295	1,292	1,279	1,257	1,227	1,190	1,143	1,090	1,030	0,966	0,894	0,81
$75^\circ$	1,388	1,384	1,368	1,343	1,307	1,262	1,209	1,147	1,077	1,001	0,917	0,82
$80^\circ$	1,480	1,476	1,457	1,429	1,388	1,336	1,274	1,203	1,122	1,034	0,938	0,83
$85^\circ$	1,573	1,567	1,546	1,514	1,466	1,409	1,338	1,257	1,165	1,066	0,957	0,83
$90^\circ$	1,666	1,659	1,634	1,598	1,546	1,480	1,402	1,310	1,206	1,095	0,974	0,84

Genauigkeit der angegebenen Werte: Ungefähr 1 bis 2 Einheiten der dritten Dezimale.



#### 4. Ionensättigungsstrom aus der Anode.

Wir betrachten nun den Fall des Ionensättigungsstroms aus der Anode, d.h. den Fall, in dem

$$V_A = 0 \quad (4.1)$$

in dem sich der Ionenstrom so einstellt, daß die Feldstärke an der Anode der Gleichung

$$E_A = 0 \quad (4.2)$$

genügt. Wegen (4.1) wird dann die Ionendichte an der Anode unendlich; die Anode ist eine „natürliche Grenze“ im Sinn der Bemerkungen nach (1.13), und (1.2) oder (1.1) mit

$$U = V_K \quad \text{und} \quad \eta = \eta_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \lambda^2}}$$

nach (1.15) und (1.14).

$\eta$  ist also an der Anode jedenfalls positiv. Daraus folgt aus (4.2), (1.9) und (1.11b)

$$= \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{und} \quad \eta = +k_0 \quad \text{an der Anode.} \quad (4.3)$$

Damit erhält man (weil  $\eta = \eta_1$  an der Anode) das Ergebnis

$$k_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \lambda^2}} \quad (4.4)$$

Die Gestalt der Kurven  $U(x)$  hängt damit wesentlich nur mehr von dem einen Parameter  $\lambda = a : b$  ab. Das Ergebnis ist auf Grund der Gleichungen (1.11) und (1.12) unter Berücksichtigung von (4.4) in Abb. 5 dargestellt.

Nun seien  $U_d$ ;  $U_K$  sowie  $a$  gegeben: Aus (4.1) und (4.2) folgt  $V_K = U_d$ ; nach (1.3), (1.9) und (1.10) berechnet sich daher der Wert  $\varphi_K$  des Parameters  $\varphi$  an der Kathode (an der  $U = 0$  aufgrund der eingangs zusammengestellten Bezeichnungen) aus

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \varphi_K &= \frac{1}{k_0^2} \cdot \left( \frac{a\sqrt{U_d} + b\sqrt{U_K}}{\sqrt{(a^2 + b^2)(U_K + U_d)}} + k_0^2 - 1 \right) \\ \sin^2 \varphi_K &= \frac{1}{k_0^2} \cdot \left( 1 - \frac{a\sqrt{U_d} + b\sqrt{U_K}}{\sqrt{(a^2 + b^2)(U_K + U_d)}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Wir führen nun die Hilfsveränderlichen  $\chi$  und  $\tau$  im Intervall  $(0; \frac{\pi}{2})$  ein, so daß

$$\left. \begin{aligned} (a : b) &= \lambda = \operatorname{tg} \chi \\ \frac{U_d}{U_K} &= \operatorname{tg} \tau \quad (= \sqrt{V_K : U_K} \text{ wegen } U_d = V_K). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Wegen (4.4) bzw. (4.5) wird dann

$$k_0^2 = 1 - \cos \chi, \quad \text{also} \quad k_0 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2} \quad (4.7)$$

bzw.

$$\sin \varphi_K = \pm \frac{\sin \frac{\tau - \chi}{2}}{\sin \frac{\chi}{2}} \quad (4.8)$$

Man ergibt sich, wenn man (1.12) einmal auf die Kathode ( $x = 0$ ) und einmal auf die Anode ( $x = d$ ) anwendet und dabei die eckige Klammer auf der rechten Seite von (1.12) mit  $Q_K$  bzw.  $Q_A$  bezeichnet, durch Sub-

traktion

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\lambda} \cdot (U_K + V_K)^{3/4}}{(a^2 + b^2)^{1/4}} \cdot [Q_K - Q_A] \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{\lambda} \cdot U_K^{3/4}}{b^{1/2}} \cdot \frac{(\cos \chi)^{1/2}}{(\cos \tau)^{3/2}} \cdot [Q_K - Q_A]. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

In Anlehnung an ROTHE und KLEEN [1], S.16 und S.32 setzen wir jetzt noch

$$\frac{9}{4A} \cdot \frac{d^2}{U_K^{3/2}} \cdot b = \frac{9}{4A} \cdot \frac{d^2}{U_K^{1/2}} \cdot \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot i_n = I_K^* \quad (4.10)$$

Dann bedeutet  $I_K^*$  das Verhältnis des Elektronenstroms  $i_n$ , der tatsächlich von der Kathode zur Anode

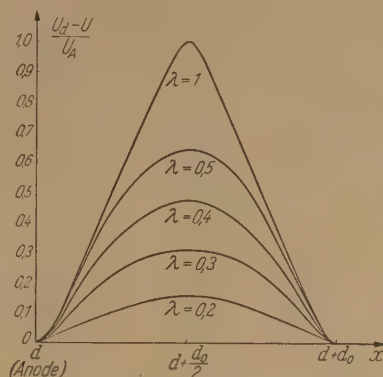


Abb. 5. Potentialverlauf bei Ionensättigungsstrom aus der Anode ( $V_A = 0$ , d.h. Ionen ohne Anfangsgeschwindigkeit;  $E_A = 0$ , d.h. Feldstärke 0 an der Anode) für verschiedene  $\lambda = a : b = \frac{i_p}{i_n} \cdot \sqrt{\frac{M}{m}}$ . Im Fall  $U_d$  (Spannung)  $= 0$  ist die Kathode an der Stelle  $x = d + d_0$  zu denken.

geschickt wird, zu demjenigen Elektronensättigungsstrom  $\frac{4A}{9} \cdot \frac{U_K^{1/2}}{d^2} \cdot \sqrt{\frac{2e}{m}}$ , den eine Glühkathode an eine Anode im Abstand  $d$  aufgrund der Raumladungsgleichung (ohne Ionen) bei der Spannung  $U_K$  zwischen Kathode und Anode abgeben könnte, d.h. bei derjenigen Spannung, die der Elektronengeschwindigkeit an der Kathode im vorliegenden Fall entspricht. Damit ergibt sich schließlich aus (4.10), (4.9), (1.12), (4.3)<sup>1</sup>, (4.7) und (4.8) die Gleichung

$$I_K^* = \frac{\cos \chi}{\cos^3 \tau} \cdot \left[ (\cos 2\chi) \cdot \xi_1(k_0; \varphi_K) + (\sin 2\chi) \left( \xi_2(k_0; \varphi_K) - \xi_2\left(k_0; \frac{\pi}{2}\right) \right) \right]^2 \quad (4.11)$$

mit

$$k_0 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2}; \quad \sin \varphi_K = \pm \frac{\sin \frac{\tau - \chi}{2}}{\sin \frac{\chi}{2}}.$$

Die rechte Seite in dieser Gleichung für  $I_K^*$  hängt also letzten Endes bloß von  $\chi$  und  $\tau$  ab. (4.11) ist daher bei gegebenem  $I_K^*$  und gegebenem  $\tau = \sqrt{U_d : U_K}$  eine Gleichung für  $\chi$  und damit für dasjenige Verhältnis  $\operatorname{tg} \chi = \lambda = a : b$  der reduzierten Ströme, das sich unter den gegebenen Bedingungen einstellt.

Besonders übersichtlich wird das Ergebnis, wenn man zunächst die weitere Voraussetzung

$$U_d = 0 \quad (4.12)$$

einführt, d.h. gleiches Potential von Kathode und

<sup>1</sup> Vgl. die Grenzkurve zwischen schraffiertem und ungeschraffiertem Bereich in Abb. 1.

<sup>2</sup> Mit  $n = 0$ , d.h.  $\varphi_A = \frac{\pi}{2}$  ( $\varphi_A$  bedeute hier wie im folgenden den Parameterwert von  $\varphi$  an der Anode).



Anode. Dann ist

$$\tau = 0; \sin \varphi_K = \pm 1 \quad (4.12a)$$

nach (4.6) und (4.8). Wir denken uns die Anode links von der Kathode, d.h. wir setzen voraus  $d < 0$ . Wegen  $\frac{dx}{d\varphi} < 0$  (vgl. S. 96) ist dann  $\varphi_A > \varphi_K$ , also  $\varphi_K < \frac{\pi}{2}$ . Die richtige Lösung von (4.12a) bezüglich  $\varphi_K$  ist dann im vorliegenden Fall eindeutig  $\varphi_K = -\frac{3\pi}{2}$ , wie folgendermaßen zu erkennen ist:

Da nach (4.12) an Kathode und Anode dasselbe Potential herrscht, muß dazwischen jedenfalls (mindestens) eine Extremstelle des Potentials liegen. Ausgehend von  $\varphi_A = \frac{\pi}{2}$  in Richtung abnehmender  $\varphi$  kommt man nach (1.9) zum erstenmal bei  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  zu einer solchen Extremstelle<sup>1</sup>. Die nächste Stelle mit  $E = 0$  (was nach (4.2), (4.12) und (1.3)<sup>2</sup> nicht nur an der Anode, sondern auch an der Kathode gelten muß) ergibt sich dann bei abnehmendem  $\varphi$  für  $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$ . Dort ist dann aber wieder (wie an der Anode) nicht nur  $E = 0$ , sondern auch  $U = 0$  (und unendliche Ionendichte). Da aus physikalischen Gründen nicht einzusehen wäre, wieso zwischen Kathode und Anode noch eine solche Stelle liegen sollte, gibt  $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$  den gesuchten Parameterwert der Kathode.

Auf Grund dieser Überlegungen ergibt sich nach (4.12a), (4.11) und (1.12a) als Zusammenhang zwischen  $I_K^*$  und  $\chi$  (mit  $\operatorname{tg} \chi = a:b$  nach (4.6)) die Gleichung

$$I_K^* = (\cos \chi) \cdot \sin^2 2\chi \cdot \left[ 4\xi_2 \left( \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right]^2, \quad (4.13)$$

weil

$$\xi_2 \left( k_0; \frac{\pi}{2} \right) - \xi_2 \left( k_0; -\frac{3\pi}{2} \right) = 4\xi_2 \left( k_0; \frac{\pi}{2} \right)$$

auf Grund der Definition (1.12a).

Zeichnet man nach (4.13) die Kurve  $I_K^*(\chi)$ , so ergibt sich, daß

$$(I_K^*)_{\max} \approx 16,64 \quad (4.14)$$

für keinen Wert von  $\chi$ , d.h. nach (4.6) für kein Verhältnis  $a:b$  der reduzierten Ströme überschritten werden kann. Ein größerer normierter Elektronenstrom  $I_K^*$  läßt sich daher unter den Voraussetzungen (4.1), (4.2) und (4.12) keinesfalls von der Kathode zur Anode schicken. Genauerem Einblick, im besonderen zum Vergleich mit den Ergebnissen von ROTHE und KLEEN [1], bekommt man noch, wenn man statt  $I_K^*(\chi)$  den Zusammenhang zwischen  $I_K^*$  und der Elektronenenergie im Potentialminimum ( $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ )<sup>3</sup> untersucht: Nach (2.4), (4.6) und (4.7) ist ihre Differenz gegenüber der Elektronenenergie an der Anode (Potentialmaxi-

um,  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ) gegeben durch

$$U_\delta = U_A \cdot \sin^2(2\chi) \quad (4.1)$$

wegen (1.1) und  $V_A = 0$ .

Die Elektronenenergie für  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  ist daher gegeben durch

$$U_A - U_\delta = U_A \cos^2(2\chi). \quad (4.2)$$

Damit ist durch  $\chi$  als Parameter der Zusammenhang zwischen dem Verhältnis

$$u_{\min} = \cos^2 2\chi \quad (4.1)$$

der Elektronenenergie im Potentialminimum zur Elektronenenergie an der Anode und dem aus (4.13) folgenden normierten Elektronenstrom  $I_K^*(\chi)$  gegeben. Das Ergebnis  $I_K^*(u_{\min})$  ist in Abb. 6 (Kurve für  $U_d = 0$ ) dargestellt. Die entsprechende Kurve ([1], S. 33) für Elektronen allein ist gestrichelt gezeichnet<sup>1</sup>.

Für kleine  $\chi$  folgt aus (4.13) und (3.8)

$$I_K^* \approx 18\pi^2 \cos^3 \chi \sin^2 \chi \cdot \left( 1 - \frac{15}{4} \sin^2 \frac{\chi}{2} \right)^2, \quad (4.1)$$

was für den ganzen in Betracht kommenden Bereich der Veränderlichen  $\chi$  eine brauchbare Näherung darstellt.

Wir halten nun zwar an den Voraussetzungen (4.1) und (4.2), aber nicht mehr an der Voraussetzung (4.1) fest und lassen damit auch den allgemeineren Fall  $U_d \neq 0$  zu. Will man auch hierfür den Vergleich mit ROTHE und KLEEN durchführen, so empfiehlt es sich statt  $I_K^*$  die Größe

$$I^* = \frac{9}{4A} \cdot \frac{d^2}{U_A^{3/2}} \cdot b = \frac{9}{4A} \cdot \frac{d^2}{U_A^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot i_n \quad (4.1)$$

zu benutzen, d.h. zur Normierung des Stroms die Elektronenenergie an der Anode statt an der Kathode zu verwenden. Der Grund dazu liegt einerseits darin, daß unter der Voraussetzung (4.1) wegen (1.1) notwendig  $U_A \geq U_K$  sein muß, damit überhaupt Ionen von der Anode zur Kathode gelangen können; andererseits bezieht sich  $I^*$  in den entsprechenden Kurven aus [1], S. 33 immer auf die höhere der beiden durch  $U_A$  und  $U_K$  gegebenen Elektronenenergien.

Nach (1.1) und (4.6) ist

$$U_A = U_K + U_d = U_K (1 + \operatorname{tg}^2 \tau) = \frac{U_K}{\cos^2 \tau} \quad (4.2)$$

und daher nach (4.19), (4.10) und (4.11)

$$I^* = I_K^* \cos^3 \tau = \cos \chi \cdot \left[ (\cos 2\chi) \cdot \xi_1(k_0; \varphi_K) + (\sin 2\chi) \left( \xi_2(k_0; \varphi_K) - \xi_2(k_0; \frac{\pi}{2}) \right) \right]^2 \quad (4.2)$$

mit den bereits in (4.11) angegebenen Zusatzbedingungen

$$k_0 = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\chi}{2}; \quad \sin \varphi_K = \pm \frac{\sin \frac{\tau - \chi}{2}}{\sin \frac{\chi}{2}}. \quad (4.21)$$

Zur richtigen Lösung für  $\varphi_K$  kann dabei die folgenden physikalische Überlegung dienen (vgl. Abb. 6a, die das Beispiel  $\tau = 40^\circ$  darstellt): Sind keine Elektronen vorhanden ( $b = 0$ , also nach (4.19) auch  $I^* = 0$  und

<sup>1</sup> Für  $U_d = 0$  ist  $I_K^*$  und  $I^*$  nach (4.19) dasselbe, ebenso auch die Elektronenenergie an Kathode und Anode.

<sup>1</sup> Der Sonderfall  $E \equiv 0$  (konstantes Potential) ist uninteressant und kann von vornherein ausgeschlossen werden.

<sup>2</sup> Nach (1.3) ist nämlich der Betrag der Feldstärke eindeutig durch  $U$  bestimmt.

<sup>3</sup> Es handelt sich hier wirklich um ein Potentialminimum, weil  $\frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{dE}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$ , wobei  $\frac{d\varphi}{dx} < 0$  (vgl. S. 96) und

$\frac{dE}{d\varphi} > 0$  für  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  nach (1.9).



ch (4.6)  $\chi = \frac{\pi}{2}$ , dann ergibt sich als Ionenstrom  $I_d > 0$  gerade derjenige Strom, der aus der (uni-  
polaren) gewöhnlichen Raumladungsgleichung folgt.  
Die Feldstärke  $E = E_0 \cos \varphi$  ändert dann weder ihr  
Vorzeichen noch das Vorzeichen ihrer Ableitung zwi-  
schen Anode und Kathode.  $\varphi_K$  muß also zwischen  
 $\frac{\pi}{2}$  und 0 liegen (da  $\varphi$  von der Anode ( $x = d < 0$ )  
zur Kathode ( $x = 0$ ) hin *abnimmt*), und zwar wegen  
(8) und  $\chi = \frac{\pi}{2}$  so, daß

$$\sin \varphi_K = \sqrt{2} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2} \right).$$

Setzt man nun bei festem  $U_d$  (und  $V_A = 0$ )  $I^*$  von 0  
aus *wachsen*, so wird man schließlich zu einer Potential-  
teilung gelangen, bei der in einiger Entfernung von  
der Anode die Raumladung der *Elektronen* überwiegt,  
daß  $E = E_0 \cos \varphi$  zwischen Anode und Kathode  
ein *Wendepunkt* aufweisen wird, der dem Para-  
meterwert  $\varphi = 0$  zugeordnet ist, so daß  $\varphi_K < 0$  wird.  
Setzt man  $I^*$  weiter wachsen, so wird, wie es bei  $U_d = 0$   
immer der Fall war, schließlich auch wieder  
ein Potentialminimum ( $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) auftreten. Für die  
Kathode gilt dann  $\varphi_K = -\frac{\pi}{2}$ . Unter Umständen

gibt es dann auch auf der Kathodenseite des Po-  
tentialminimums (ähnlich wie im Fall  $U_d = 0$ )  
einmal einen Wendepunkt des Potentials (mit  
 $\varphi = -\pi$ ) auftreten. Jedenfalls bleibt aber  $\varphi_K > -\frac{3\pi}{2}$ ,  
es sonst wegen der Periodizität der Funktion  $U(\varphi)$   
zwischen Kathode und Anode nochmal eine Stelle  
gäbe, an der die Ionen wie an der Anode die Geschwin-  
keit 0 hätten und an der zugleich die Feldstärke 0  
erscheinen müßte, was aus physikalischen Gründen  
nicht in Betracht kommt.

Nach diesen Vorbereitungen erhält man nun für  
das gegebene  $\tau^1$  aus (4.21), (4.21a) und (4.17) mittels  
des Parameters  $\chi$  den Zusammenhang zwischen dem  
normierten Elektronenstrom  $I^*$  und dem Verhältnis  
 $u_{min}$  der Elektronenenergie im Potentialminimum zur  
Elektronenenergie an der Anode in ähnlicher Weise  
wie im Fall  $U_d = 0$  aus (4.13) und (4.17). Dieser  
Zusammenhang ist zugleich mit den entsprechenden  
Vergleichskurven von ROTHE und KLEEN (dort für  
Elektronen allein, bei Abwesenheit von positiven La-  
dungsträgern) in Abb. 6 dargestellt<sup>2</sup>. Dabei ergeben  
sich wieder maximale Werte  $I^*_{max}$ , die aber im all-  
gemeinen (ebenso wie im Sonderfall  $U_d = 0$ ) *nicht* erst  
auftreten, wenn  $u_{min} = 0$  wird. Daher wird im all-  
gemeinen eine *sprunghafte Änderung des Potentialver-  
laufs* eintreten müssen, wenn man den Elektronen-  
strom über  $I^*_{max}$  hinaus zu steigern sucht, während  
festgehalten wird; dann muß nämlich notwendig  
ein Teil der Elektronen zwischen Kathode und Anode  
*kehren*, weil nach den vorausgegangenen Rechnun-  
gen eine andere Lösung unmöglich ist; an einer solchen  
Umkehrstelle („virtueller Kathode“) ist aber notwendig  
die Elektronenenergie 0, im Gegensatz zu dem (durch

$u_{min}$  gegebenen) positiven Minimum der Elektronen-  
energie vor Ausbildung der virtuellen Kathode.

Qualitativ ergibt sich also ein Bild, das viele  
gemeinsame Züge mit demjenigen für Elektro-  
nen *allein* aufweist. Zur  
Zeichnung sei noch be-  
merkt, daß die Kurven  
 $u_{min}(I^*)$  bei ihrem Be-  
ginn an der „Grenz-  
kurve A“ abgesehen  
vom Grenzfall  $\tau = 0$

( $U_d = 0$ ) waagrecht einmünden sollten (auch die ent-  
sprechenden Kurven bei ROTHE und KLEEN (S. 33)  
sind an dieser Stelle etwas ungenau); an der „Grenz-  
kurve A“ ist nämlich  $\varphi_K = -\frac{\pi}{2}$  (erstes Auftreten eines  
Potentialminimums bei wachsendem  $I^*$ , vgl. S. 101 links)  
und daher nach (4.21a)  $\frac{d\chi}{d\varphi_K} = 0$ ;  $\frac{d\varphi_K}{d\chi} \rightarrow \infty$  bei festem  
 $\tau \neq 0$ ; daraus folgt durch totale Ableitung von (4.21)  
nach  $\chi$  (bei festem  $\tau$ ) auch  $\frac{dI^*}{d\chi} \rightarrow \infty$  und wegen (4.17)

$$\frac{dI^*}{du_{min}} = \frac{dI^*}{d\chi} \cdot \frac{du_{min}}{d\chi} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \varphi_K = -\frac{\pi}{2}.$$

Bisher war  $U_d \geq 0$  vorausgesetzt. Für  $U_d < 0$   
sind die Verhältnisse insofern grundsätzlich anders,  
als dann die von der  
Anode mit der Ge-  
schwindigkeit 0 aus-  
gehenden Ionen kei-  
nesfalls zur Kathode ge-  
langen können. Zwar  
wird in der Nähe der  
Anode auch weiterhin  
die positive Raumladung  
überwiegen und wegen  
 $E_A = 0$  auch weiterhin  
 $E > 0$  für  $x > d^2$  hin-  
reichend nahe an der  
Anode gelten; es wird  
also zwar ein gewisser  
Ionenstrom in den Raum  
zwischen Anode und  
Kathode eindringen,  
aber nur bis zu einer  
„virtuellen Anode“

( $x = d_a$ ) zwischen den  
Elektroden, an der die  
Ionen wieder die Ge-  
schwindigkeit 0 haben  
und an der also das  
Potential und die Feld-  
stärke ebenso wie an  
der Anode sein müssen.  
Auf der Kathodenseite  
( $d_a < x < 0$ ) sind die  
 $\frac{dE}{dx} < 0$  und (wegen  $E = 0$  für  $x = d_a$ )  $E < 0$  für den  
ganzen Kathodenbereich folgt.

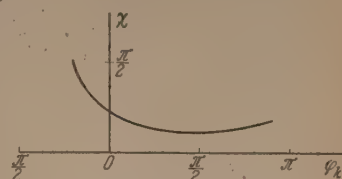


Abb. 6a. Zusammenhang zwischen  $\varphi_K$  und  $\chi$  (wobei  $\text{tg } \chi = a : b$ ) für  $\tau = 40^\circ$  (d. h.  $U_K : U_A \approx 0,58$ ).

[Die Werte  $\frac{\pi}{2}$  und  $\pi$  rechts von 0 sind negativ.]

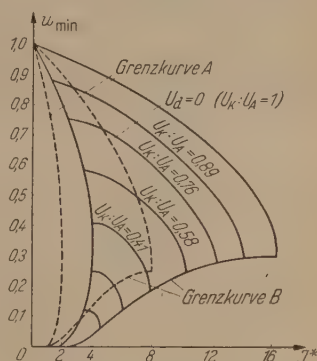


Abb. 6. Zusammenhang zwischen  $I^*$  (normierter Elektronenstrom, bezogen auf die Anode) und  $u_{min}$  (Verhältnis der kinetischen Energie der Elektronen im Potentialminimum zu ihrer kinetischen Energie an der Anode) für verschiedene Werte  $U_K : U_A < 1$  (bei Ionensättigungsstrom).

Grenzkurve A: Mindestwerte des normierten Stroms  $I^*$  bei Auftreten eines Potentialminimums;

Grenzkurve B: Maximale Werte des normierten Stroms  $I^*$  (jeweils bei gegebenem Verhältnis  $U_A : U_K$ ).

Gestrichelt: Vergleichskurven (nach ROTHE und KLEEN) für Elektronen allein (Grenzkurve A, Grenzkurve B und  $I^*$  ( $u_{min}$ ) für  $U_d = 0$ ); die Grenzkurve B entspricht der Grenzkurve II bei ROTHE und KLEEN.

Elektronen *allein*, woraus

<sup>1</sup> d. h. nach (4.6) für jedes gegebene Verhältnis  $U_d : U_K$  und damit nach (4.20) auch für jedes gegebene Verhältnis  $U_d : U_A (= \sin^2 \tau)$ .

<sup>2</sup> Der Punkt auf der  $I^*$ -Achse, an dem sich die „Grenzkurven“ A und B treffen, gehört zu  $U_K = 0$  und gibt genau den Fall einer LANGMUIRSchen Doppelschicht ( $I^* \approx 1,86$ ).

<sup>1</sup> Weil  $\frac{\partial I^*}{\partial \varphi_K} \neq 0$  für alle in Betracht kommenden  $k_0$  und

für  $\varphi_K = -\frac{\pi}{2}$ , was unter Berücksichtigung von (1.12a) leicht zu erkennen ist.

<sup>2</sup> Auch weiterhin soll  $d < 0$  vorausgesetzt sein.



Im Anodenbereich ( $d < x < d_a$ ) gelten die für gleichzeitige Anwesenheit von Ionen und Elektronen unter der Voraussetzung (4.12) abgeleiteten Gleichungen, wobei bloß jetzt die „virtuelle Anode“ die Rolle der Kathode übernimmt.

Durch sinngemäße Anwendung von (4.10)<sup>1</sup> und (4.13) folgt dann

$$d_a - d = \frac{2\sqrt{A}}{3} \cdot \frac{U_A^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b}} \cdot \cos^{3/2} \chi \cdot \sin \chi \left\{ \times 8 \xi_2 \left( \sqrt{2} \sin \frac{\chi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (4.22)$$

mit  $\tan \chi = a : b$ , wobei hier sinngemäß  $a = 2 \cdot \sqrt{\frac{M}{2e}} \cdot i_p$  zu setzen ist, wenn  $i_p$  den von der Anode ausgehenden

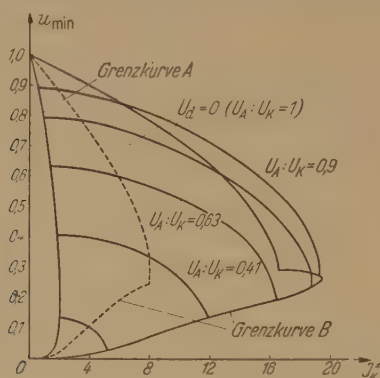


Abb. 7. Zusammenhang zwischen  $I_K^*$  (normierter Elektronenstrom, bezogen auf die Kathode) und  $u_{min}$  (Verhältnis der kinetischen Energie und Elektronen im Potentialminimum zu ihrer kinetischen Energie an der Kathode) für verschiedene Werte  $U_K : U_A > 1$  (bei Ionensättigungsstrom).

Grenzkurve A: Mindestwerte des normierten Stroms  $I_K^*$  bei Auftreten eines Potentialminimums;

Grenzkurve B: Maximale Werte des normierten Stroms  $I_K^*$  (jeweils bei gegebenem Verhältnis  $U_K : U_A > 1$ ).

Gestrichelt: Vergleichskurven (nach ROTHE und KLEEN) für Elektronen allein ( $I_K^*(u_{min})$  für  $U_d = 0$  und Grenzkurve B).

Ionenstrom darstellt, weil derselbe Strom auch wieder zurückfließt und damit die doppelte Raumladung verursacht (vgl. die Bedeutung von  $a$  in (1.2)).

Im Kathodenbereich ( $d_a < x < 0$ ) gilt (1.3) mit  $a = 0$  (keine Ionen) und  $c = b \cdot \sqrt{U_d + U_K}$ , womit die Forderung  $E = 0$  für  $x = d_a$ , d.h. für  $U = U_d$  erfüllt ist ( $U_d$  ist auch das Potential an der virtuellen Anode). Die Integration von (1.3) ergibt unter diesen Voraussetzungen, wie durch die Probe sofort zu erkennen ist (vgl. z. B. auch [1], 3. Aufl. 1947 S. 40),

$$x = x_1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{A}{b}} \left\{ \sqrt{U + U_K} - \sqrt{U_d + U_K} \right\} \times \left( \sqrt{U + U_K} + 2 \sqrt{U_d + U_K} \right)^2 \quad (4.23)$$

Der Abstand der Kathode ( $x = 0$ ) von der virtuellen Anode ( $x = d_a$ ) folgt daraus durch Subtraktion  $x(U = 0) - x(U = U_d)$ . Dabei ist nach (1.1)  $U_d = U_A - U_K (< 0$  im vorliegenden Fall). Dementsprechend setzen wir jetzt nicht mehr wie bisher

$$U_K = U_A \cdot \cos^2 \tau$$

<sup>1</sup>  $d_a - d$  statt  $(-d)$  und  $U_A$  statt  $U_K$  gesetzt.

<sup>2</sup> Die Integration wurde für den Fall  $a = 0$  nochmal eigens durchgeführt, weil der Grenzübergang aus den allgemeinen Formeln (für  $a \neq 0$ ) nicht ganz einfach ist: Schon die Einführung eines (endlichen) Maximums von  $E$  durch (1.4) ist daran geknüpft, daß ein endliches  $V_K$  vorhanden ist, was für  $a = 0$  keinen physikalisch definierten Sinn hätte.

(was der Festsetzung (4.6) entspricht), sondern

$$(U_d + U_K =) U_A = U_K \cdot \cos^2 \tau \quad (4.1)$$

$$(\text{also } U_d = -U_A \cdot \tan^2 \tau).$$

Damit ergibt sich nach (4.23)

$$-d_a = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{A}{b}} \cdot U_K^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1 - \cos \tau} \cdot (1 + 2 \cos \tau). \quad (4.2)$$

Aus (4.10), (4.22), (4.6a) und (4.24) folgt dann (wegen

$$1 - \cos \tau = 2 \sin^2 \frac{\tau}{2})$$

$$I_K^* = \frac{9}{4} \cdot \frac{[(d_a - d) - d_a]^2}{U_K^{\frac{3}{2}}} \cdot b = 2 \left[ \sin \frac{\tau}{2} \cdot (1 + 2 \cos \tau) + \cos^{3/2} \tau \cdot F^*(\chi) \right]^2 \quad (4.3)$$

mit

$$F^*(\chi) = \cos^{3/2} \chi \sin \chi \cdot 4 \sqrt{2} \xi_2 \left( \sqrt{2} \sin \frac{\chi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

(4.25) gibt nun wieder die Möglichkeit, für jedes (also für jedes  $U_A : U_K$ ) den Zusammenhang zwischen  $I_K^*$  und dem Verhältnis  $u_{min}$  des Minimums der kinetischen Energie der Elektronen zu ihrer kinetischen Energie  $U_K$  an der Kathode zu berechnen. Nach (4.15) ist nämlich die Differenz des Potentialminimums gegenüber dem Anodenpotential gegeben durch

$$U_d = U_A \cdot \sin^2 2\chi.$$

Damit ist entsprechend der neuen Bedeutung von  $u_{min}$  und nach (4.6a)

$$u_{min} = \frac{U_A - U_d}{U_K} = \cos^2 \tau \cdot (1 - \sin^2 2\chi) = \cos^2 \tau \cos^2 2\chi. \quad (4.4)$$

Zusammen mit (4.25) gibt dies wieder für jedes  $\tau$  (also für jedes  $U_A : U_K < 1$ ) durch Vermittlung des Parameters  $\chi$  einen Zusammenhang zwischen  $I_K^*$  und  $u_{min}$ . Einige der zugehörigen Kurven sind in Abb. 7 wieder gegeben. Auch hier zeigt sich ähnlich wie für  $U_A > U_K$ , daß man bei festem  $\tau$  (und  $V_A = 0$ ) den reduzierten Strom nicht beliebig wachsen lassen kann, ohne daß eine virtuelle Kathode entsteht. Die „Grenzkurve A“ die auch hier wieder für jedes  $\tau$  die Wertepaare ( $u_{min}, I_K^*$ ) wiedergibt, die zu den maximalen  $I_K^*$ -Werten gehören, hat jedoch hier noch eine Besonderheit: Bei festgehaltenem  $U_K$  (also bei festgehaltener Elektronenenergie an der Kathode) ist der maximale Strom  $I_K^*$ , der zur Anode geschickt werden kann, bei einer kleinen Gegenspannung größer als bei gleichem Potential von Anode und Kathode; das Maximum von  $I_K^*$  ist ungefähr dann am größten, wenn diese Gegenspannung etwa  $\frac{1}{3} U_K$  ausmacht.

Man könnte nun hier ähnlich wie bei den Untersuchungen von ROTHE und KLEEN auch noch die Frage behandeln, wann eine virtuelle Kathode, wenn sie einmal entstanden ist, bei abnehmendem  $I_K^*$  verschwindet. Dies soll hier aber nicht weiter ausgeführt werden; qualitativ würden sich dieselben Erscheinungen (speziell auch dieselben Hystereserscheinungen) ergeben wie wenn man Elektronen allein (ohne positive Ionen) betrachtet (vgl. [1], S. 50).

## 5. Gleiche reduzierte Ströme; Stabilitätsbetrachtung

Im folgenden soll nun von den Voraussetzungen (4.1) und (4.2) abgegangen werden. Statt dessen



mit der Voraussetzung

$$a = b \quad (5.1)$$

die „reduzierte Ströme“ behandelt. Die Gleichungen (1.12) und (1.11a) vereinfachen sich dann zu

$$x_1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{A}{b}} \cdot (U_K + V_K)^{3/4} \cdot \xi_2(k_0; \varphi) \quad (5.2)$$

$$U = \frac{1}{2} (V_K - U_K) + (V_K + U_K) \cdot f(\eta) \quad (5.3)$$

$$f(\eta) = \eta \cdot (1 - \eta^2) \cdot \sqrt{2 - \eta^2}. \quad (5.3a)$$

Die Parameterwerte  $\eta = \eta_K$  bzw.  $\eta = \eta_A$  für  $x=0$  (Kathode) bzw.  $x=d$  (Anode) ergeben sich aus (5.3), wenn man zunächst  $f(\eta_K)$  aus  $U=0$  und  $f(\eta_A)$  aus  $U=U_d$  ausrechnet und nachher (5.3a) benutzt. Die Auflösung ist immer möglich, weil immer  $|U - U_K| < U_K + V_K$ . Die zugehörigen Parameterwerte  $\varphi_K$  und  $\varphi_A$  sowie  $k_0$  folgen dann nach (1.11b) und (5.2) aus den drei Gleichungen

$$\eta_K = k_0 \cdot \sin \varphi_K; \quad \eta_A = k_0 \cdot \sin \varphi_A \quad (5.4)$$

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{3}{2} d \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{b}{A}} \cdot (U_K + V_K)^{-3/4} \\ & = \xi_2(k_0; \varphi_A) - \xi_2(k_0; \varphi_K). \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Hat man ein Lösungssystem  $\varphi_K; \varphi_A; k_0$  (die Frage der Eindeutigkeit soll hier nicht weiter erörtert werden), dann ergibt sich der zugehörige Potentialverlauf  $U(x)$  mit Hilfe des Parameters  $\varphi$  aus (5.2) und (5.3) unter Berücksichtigung von  $\eta = k_0 \cdot \sin \varphi$ .

Die linke Seite von (5.5) ist (für  $d < 0$ ) nach (4.10) etwas anderes als

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{I_K^*} \left(1 + \frac{V_K}{U_K}\right)^{-3/4}.$$

Nimmt man den „normierten Strom“ nun nicht mehr in (4.10) auf  $U_K$ , sondern auf  $(U_K + V_K)^{1/2}$  und setzt man demgemäß unter Berücksichtigung von (4.10)

$$= \frac{9}{4A} \cdot \frac{d^2}{(U_K + V_K)^{3/2}} \cdot b \left( = I_K^* \cdot \left(1 + \frac{V_K}{U_K}\right)^{-3/2} \right), \quad (5.6)$$

folgt nach (5.5) einfach

$$I_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} [\xi_2(k_0; \varphi_A) - \xi_2(k_0; \varphi_K)]^2. \quad (5.7)$$

Stellt man nun wieder die Frage nach maximalen Werten des normierten Stroms, hier also nach maximalen Werten von  $I_0^*$ , so folgt zunächst aus (5.7) und (1.12a) die Möglichkeit beliebig großer  $I_0^*$ , wenn  $|\varphi_A - \varphi_K|$  groß genug ist; sind etwa die Bedingungen (5.4)<sup>2</sup> durch geeignete Werte ( $\varphi_{A0}; \varphi_{K0}$ ) und erfüllt, so sind sie auch durch  $\varphi_A = \varphi_{A0} + 2n\pi$ ;  $\varphi_K = \varphi_{K0}$  und  $k_0$  erfüllt (wobei  $n$  eine beliebige natürliche Zahl sein kann), und zu jedem solchen Wertesystem gehört ein Strom  $I_0^*$ , der umso größer ist, je größer man  $n$  wählt. Liegt die Differenz der Parameterwerte  $\varphi_A$  und  $\varphi_K$  zwischen  $2n\pi$  und  $2(n+1)\pi$ , so bedeutet dies nach (5.2) und (5.3), daß die Potentialfunktion  $U(x)$  zwischen  $x=0$  und  $x=d$   $n$  ganze Wellen durchläuft.

<sup>1</sup>  $e \cdot (U_K + V_K)$  ist die Summe der kinetischen Elektrodenenergie und der kinetischen Ionenenergie nicht bloß an der Kathode, sondern an jeder beliebigen Stelle zwischen den Elektroden.

<sup>2</sup> Letzten Endes wegen (5.3) also die Bedingungen  $U=0$  an der Kathode und  $U=U_d$  für die Anode bei gegebenen  $V_K$  und  $V_A$ .

Nun erhebt sich die Frage, inwieweit (hinreichend genaue Erfüllbarkeit der theoretischen Bedingungen vorausgesetzt) diese Möglichkeiten verwirklicht werden können. Die Auflösbarkeit des Gleichungssystems (5.4); (5.5) nach  $\varphi_K; \varphi_A$  und  $k_0$  allein genügt dazu noch nicht. Auch im Fall des Ionensättigungsstroms war ja, ebenso wie es von ROTHE und KLEEN schon für Elektronen allein festgestellt wurde, nicht jeder Potentialverlauf tatsächlich zu erreichen, der den Gleichungen nach denkbar gewesen wäre.

Diejenigen Potentialkurven  $U(x)$ , die zu einem Punkt einer Kurve  $I_K^*(u_{min})$  unterhalb des Maximums von  $I_K^*$  gehörten (die Kurven  $U(x)$  mit besonders stark ausgeprägtem Potentialminimum also), konnten nicht verwirklicht werden. Man hätte nämlich, um zu diesen Entladungsformen  $U(x)$  zu gelangen (bei festgehaltenem  $U_d; U_K$ ), den Strom  $I_K^*$  etwa bis zu seinem Maximum steigern müssen und dann über den „kritischen Punkt“ des Maximums von  $I_K^*$  auf der betreffenden Kurve  $I_K^*(u_{min})$  hinweg wieder zu kleineren  $I_K^*$ -Werten übergehen müssen. Die Tatsache aber, daß man dabei einen Zwischenzustand brauchte, der eine weitere Steigerung von  $I_K^*$  nicht erlaubte, führt zu jener Instabilität, die sich in der Ausbildung einer virtuellen Kathode auswirkt. Ein Entladungszustand wird in diesem Sinne ganz allgemein als instabil gelten müssen, wenn es beliebig geringe Änderungen der physikalisch gegebenen Größen gibt (des Stroms, der Eintrittsgeschwindigkeit der Teilchen, des Elektrodenabstands, der Spannung), die eine Lösung des Problems ohne virtuelle Kathode (oder ohne „virtuelle Anode“) unmöglich machen (vorausgesetzt, daß bei dem betrachteten Entladungszustand selbst noch keine virtuelle Kathode bzw. Anode vorliegt). Dagegen wird man von einem stabilen Zustand sprechen können, wenn beliebige hinreichend kleine Änderungen der physikalisch gegebenen Größen ebenfalls wieder die Lösung des Problems ohne Auftreten einer virtuellen Kathode (bzw. Anode) erlauben. Nach dieser Definition ist zwischen „stabil“ und realisierbar zu unterscheiden: Realisierbar ist ein Zustand, zu dem man etwa von  $I_0^* = 0$  aus gelangen kann, ohne über einen instabilen Zwischenzustand zu kommen.

Es sei nun angenommen, eine durch

$$(\eta_K; \eta_A; \sqrt{I_0^*}) \quad (5.8)$$

gegebene Entladung, zu der die Werte

$$(\varphi_K; \varphi_A; k_0) \quad (5.8a)$$

gehören sollen, wäre in der Weise geändert, daß statt (5.8) die Bedingungen

$$(\eta_K + \delta_K; \eta_A + \delta_A; \sqrt{I_0^* + \delta_0}) \quad (5.9)$$

mit Hilfe der Werte

$$(\varphi_K + \delta\varphi_K; \varphi_A + \delta\varphi_A; k_0 + \delta k_0) \quad (5.9a)$$

erfüllt werden sollen. Nach (5.4) und (5.7) müßte also sein

$$\left. \begin{aligned} \delta_K &= (k_0 + \delta k_0) \cdot \sin(\varphi_K + \delta\varphi_K) - k_0 \cdot \sin \varphi_K; \\ \delta_A &= (k_0 + \delta k_0) \cdot \sin(\varphi_A + \delta\varphi_A) - k_0 \cdot \sin \varphi_A; \\ \sqrt{2} \cdot \delta_0 &= [\xi_2(k_0 + \delta k_0; \varphi_A + \delta\varphi_A) - \xi_2(k_0; \varphi_A)] \\ &\quad - [\xi_2(k_0 + \delta k_0; \varphi_K + \delta\varphi_K) - \xi_2(k_0; \varphi_K)], \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

<sup>1</sup> d. h. unterhalb der „Grenzkurve B“ (in Abb. 6 bzw. 7 sind die zugehörigen Fortsetzungen der Kurven  $I^*(u_{min})$  nicht eingetragen).



also in erster Näherung

$$\delta_K = \delta k_0 \cdot \sin \varphi_K + \delta \varphi_K \cdot k_0 \cos \varphi_K; \quad (5.11a)$$

$$\delta_A = \delta k_0 \cdot \sin \varphi_A + \delta \varphi_A \cdot k_0 \cdot \cos \varphi_A; \quad (5.11b)$$

$$\sqrt{2} \delta_0 = \delta k_0 \cdot A + \delta \varphi_K \cdot B + \delta \varphi_A \cdot C, \quad (5.11c)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\partial \xi_2}{\partial k_0} \Big|_{\varphi_A} - \frac{\partial \xi_2}{\partial k_0} \Big|_{\varphi_K}; \\ B &= - \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_K}; \quad C = + \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_A} \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Das Gleichungssystem (5.11) ist für beliebig vorgegebene  $(\delta_K; \delta_A; \delta_0)$  lösbar, wenn seine Determinante nicht verschwindet, d.h. (durch  $k_0$  gekürzt), wenn

$$\left. \begin{aligned} D &= A \cdot k_0 \cos \varphi_K \cos \varphi_A - B \sin \varphi_K \cos \varphi_A \\ &\quad - C \sin \varphi_A \cos \varphi_K \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Daran würde sich unter der Voraussetzung hinreichend kleiner  $(\delta_K; \delta_A; \delta_0)$  auch bei Berücksichtigung der Glieder 2. Ordnung in der Entwicklung der rechten Seiten von (5.10) nach  $(\delta k_0; \delta \varphi_K; \delta \varphi_A)$  nichts ändern. Dagegen würde  $D = 0$  bedeuten, daß es eine Linearkombination der drei Gleichungen (5.10) gibt, durch die auf der rechten Seite die linearen Glieder (d.h. alles, was in (5.11) auf der rechten Seite steht) zum Verschwinden gebracht werden. Unter Berücksichtigung der quadratischen Glieder hätte man dann eine Gleichung der Gestalt

$$c_A \delta_A + c_K \delta_K + c_0 \delta_0 = Q(\delta k_0; \delta \varphi_A; \delta \varphi_K), \quad (5.14)$$

wobei  $Q$  einen Ausdruck 2. Grades in den  $\delta k_0; \delta \varphi_A; \delta \varphi_K$  bedeutet.

Dazu kämen etwa noch die Gleichungen (5.11a) und (5.11b)<sup>1</sup>, mit deren Hilfe beispielsweise  $\delta \varphi_A$  und  $\delta \varphi_K$  durch  $\delta k_0$  ausgedrückt werden können. Es bliebe also eine quadratische Gleichung für  $\delta k_0$  übrig, deren Diskriminante durch ungünstige Wahl der  $(\delta_A; \delta_K; \delta_0)$  negativ gemacht werden könnte<sup>2</sup>.

Damit wären die Gleichungen (5.10) nicht für beliebige (hinreichend kleine) Änderungen  $(\delta_A; \delta_K; \delta_0)$  der Größen  $(\eta_A; \eta_K; \sqrt{I_0^*})$  lösbar, was genau unserer Definition der Instabilität entspricht.

Versucht man daher, durch allmähliche Steigerung des normierten Stroms  $I_0^*$ , ganz gleich, wie die Entladung im einzelnen „gesteuert“ wird, die Differenz  $\varphi_A - \varphi_K$  von 0 ab wachsen zu lassen, so wird es darauf ankommen, ob  $D = 0$  vermieden werden kann oder nicht.

Nach (1.12a) hat  $\frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi}$  die Periode  $\pi$ ; daher ist wegen (5.12)  $B = -C$ , wenn  $\varphi_A - \varphi_K = n \cdot \pi$  ( $n$  eine beliebige natürliche Zahl). Aus (5.13) folgt daher  $D = \pm A \cdot k_0 \cdot \cos^2 \varphi_K$ , je nachdem  $\varphi_A - \varphi_K$  ein gerades oder ein ungerades Vielfaches von  $\pi$  ist. Nun ist aber nach (5.12) und (1.12a) für alle in Betracht kom-

menden  $k_0$  immer  $A < 0$ , wenn  $\varphi_A - \varphi_K = n\pi$   $n \geq 1$  (vgl. dazu auch die Näherung (3.8)). Man daher, wenn nicht  $\cos \varphi_K = \cos \varphi_A = 0$ ,

$$D \leq 0, \text{ je nachdem } \varphi_A - \varphi_K = \begin{cases} 2m\pi \\ (2m-1)\pi, \end{cases} \quad m \text{ eine natürliche Zahl.}$$

Man stößt also bei dem Versuch,  $\varphi_A - \varphi_K$  auch bis  $2\pi$  wachsen zu lassen, notwendig auf Stellen  $D = 0$  und damit auf grundsätzliche Schwierigkeiten, wenn man nicht von vornherein einen anderen einschlägt und z. B. das gewünschte Potentialfeld im Entladungsraum zunächst von außen her aufprägt.

### Zusammenfassung.

1. Die Raumladungsgleichung für Elektronen, Ionen einheitlicher Anfangsgeschwindigkeiten (ebenes Problem, stationär) wird mittels elliptischer Integrale unter Beschränkung auf alle Fälle, in denen die Feldstärke 0 werden kann, allgemein integriert. Für periodischen Potentialverlauf  $U(x)$  wird (zunächst unabhängig von der physikalischen Realisierbarkeit) der Zusammenhang zwischen Periode und Amplitude genauer untersucht; durch trigonometrische Näherung läßt sich in diesen Fällen der Potentialverlauf  $U(x)$  bei nicht allzu großen Amplituden verhältnismäßig genau und einfach darstellen.

2. Unter der Voraussetzung, daß von der Anode Ionen ohne Anfangsgeschwindigkeit bei Feldstärke 0 ausströmen (Ionensättigungsstrom), wird die Frage des Auftretens einer virtuellen Kathode (entsprechend den Überlegungen von ROTHE und KLEEN für rechteckigen Elektronenstrom) untersucht. Es ergeben sich verblühende qualitative Analogien zum Fall der rechteckigen Elektronenströmung.

3. Am Beispiel  $i_n : i_n = \sqrt{m} : \sqrt{M}$  (gleiche „normierte Ströme“) wird die Frage der Realisierbarkeit periodischer Potentialkurven  $U(x)$  diskutiert. Der Versuch, (eine oder) mehrere „Potentialwellen“ zu bekommen, indem man den Strom allmählich von 0 an steigert und dabei die Anfangsgeschwindigkeit sowie die Spannung entsprechend steuert, scheitert wegen instabiler Zwischenzustände (die eine virtuelle Kathode oder Anode zur Folge hätten) auf grundsätzliche Schwierigkeiten. Der Versuch, solche Potentialwellen (die der Raumladungsgleichung nach sich möglich wären) zu realisieren, müßte anders angefaßt werden; man müßte etwa versuchen, dem Entladungsraum zunächst von außen her ein entsprechendes Feld aufzuprägen; nachträglich könnte dann bei geeigneten Strömen ( $a$  und  $b$ ) allein auf Grund der entstandenen Raumladungen erhalten bleiben.

Herrn Prof. Dr. W. O. SCHUMANN danke ich für viele Anregungen.

**Literatur.** [1] ROTHE u. KLEEN: Grundlagen und Kurvenlinien der Elektronenröhren. — [2] SCHUMANN, W. O.: Physik **121**, 629 (1943). — [3] SPANGENBERG, K., F. HELM: Electr. Comm. **24**, 108 (1947). — [4] LINDER, E. u. K. G. HERNQVIST: J. appl. Physics **21**, 1088 (1950). [5] HAUG, A.: Z. techn. Physik **24**, 143 (1943). [6] WÄHLDES Druckes erschien: MÜLLER-LÜBECK, K.: Z. ang. Phys. **4**, 409 (1951).

Dozent Dr. F. WENZL,  
München 38, Walhallastraße 6

<sup>1</sup> Gegebenenfalls noch unter Berücksichtigung der Glieder 2. Grades.

<sup>2</sup> Daß keine Sonderfälle auftreten, in denen die Diskriminante trotz beliebiger Wahl der  $(\delta_A; \delta_K; \delta_0)$  positiv oder 0 bleibt, müßte gezeigt werden, indem man die eben angedeutete Rechnung durchführt. Darauf soll hier verzichtet werden. Die Überlegungen nach (5.14) sollen nur eine Skizze der auftretenden Schwierigkeiten geben.



# Die Messung kleinster Drucke unterhalb $10^{-7}$ Torr mittels eines Adsorptionsmanometers.

Von M. SEDDIG und G. HAASE, Frankfurt a. M.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 19. November 1951).

## Einleitung.

Zur Messung niedrigster Drucke bis zu etwa  $10^{-6}$  Torr herunter können je nach den Betriebsbedingungen und den Anforderungen an die Genauigkeit an die Bequemlichkeit der Messung und an die Betriebsstabilität des Meßinstrumentes Kompressions-, Strahl-, Radiometer- oder Ionisationsmanometer verschiedener Art ausgeführt werden. Alle Vakuummeßmethoden, die auf irgendwelchen Nebenwirkungen beruhen, werden unterhalb  $10^{-6}$  Torr fallendem Druck immer weniger brauchbar. Einerseits besteht aber ein großes Bedürfnis, Kriechmessungen zur relativen Beurteilung des Hochvakuums unterhalb  $10^{-7}$  Torr zu besitzen. Kleinste Leckagen werden insbesondere erzeugt, um möglichst große Oberflächen herzustellen und das Verhalten dieser Oberflächen zu prüfen. Die Verfasser benutzten deshalb wiederholt in einer Reihe von Untersuchungen Oberflächen massiver Metallproben und aufgedampfte, bzw. aufgestäubte Metallschichten seit dem Jahre 1942, angeregt durch frühere Arbeiten von J. ANDERSON [2], die Zeitabhängigkeit der Elektronenaustrittsarbeit von ursprünglich reinen Oberflächen, die auf photoelektrischem Wege nach der Methode von R. H. FOWLER [3] oder durch Kontaktpotentialdifferenzmessungen ermittelt wurde, als Kriterium für die Güte des mit dem üblichen Ionisationsmanometer nicht mehr erfassbaren Hochvakuums [4]. Es wurde vorausgesetzt, daß die gemessenen Änderungen in der Elektronenaustrittsarbeit auf die Addition von aktiven Restgasmolekeln zurückzuführen sind. Diese Voraussetzung scheint nach den bisher vorliegenden Untersuchungen bei Drucken um  $10^{-8}$  Torr unter experimentellen Bedingungen, die mit den uns gegebenen vergleichbar sind, erlaubt zu sein [5]. In späteren vergleichenden Untersuchungen über die Hochvakuummessung im Gebiet niedrigster Drucke haben sich gewisse Einschränkungen, die bei der Diskussion der Messungen mittels des Adsorptionsmanometers zu beachten sind. Über einige Ergebnisse hier berichtet werden.

## Experimenteller Aufbau.

Das Hochvakuumumpenaggregat (Abb. 1) besteht aus zwei parallel geschalteten dreistufigen Ölstrahlpumpen mit Ölfractionierung, für die das notwendige Vorvakuum durch je eine zweistufige rotierende Ölluftpumpe erzeugt wurde. Zwischen der Ölstrahlpumpe und der Vorpumpe befand sich jeweils eine Falle, die mit fester Kohlensäure in Eisbädern gekühlt wurde. Auf der Hochvakuumseite unmittelbar hinter den beiden Diffusionspumpen befand sich eine große Kühlfalle  $F_1$  mit fester Kohlensäure. Um das Vakuum zum Schutz der beiden nachfolgenden Ölstrahlpumpen  $F_2$  und  $F_3$  mit Aktivkohlefüllung, des Ionisationsmanometers  $J$ , der Getterkammer  $G$  und des Rezipienten  $R$  vor Öl- und Fettdämpfen. Außer den Schläufen über den beiden Diffusionspumpen gab es auf der Hochvakuumseite keine Hähne, Schläufe oder sonstigen lösbaren Verbindungen oder Anord-

nungen, in denen Werkstoffe mit einem verhältnismäßig hohen Dampfdruck benutzt wurden. Vor der Getterkammer, die so gestaltet war, daß sie in ein mit flüssiger Luft gefülltes Dewar-Gefäß gesetzt werden konnte, standen zwei große mit Aktivkohle beschickte und mit flüssiger Luft gekühlte Fallen, die nach Erreichung eines Hochvakuums von etwa

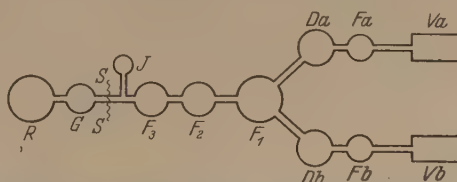


Abb. 1. Schematische Darstellung des Pumpenaggregates:  $V_a$ ,  $V_b$  Vorpumpen;  $D_a$ ,  $D_b$  Diffusionspumpen;  $F_a$ ,  $F_b$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  Kühlfallen;  $J$  Ionisationsmanometer;  $SS$  Abschmelzstelle;  $G$  Getterkammer;  $R$  Rezipient.

$10^{-6}$  Torr als Sorptionspumpen zur Erzeugung von noch tieferen Drucken eingeschaltet wurden. In der Getterkammer lag innerhalb einer Wolframspirale ein vorher sorgfältig im Hochvakuum entgastetes Röhrchen aus Aluminiumoxyd, das mit mehrmals im Hochvakuum destilliertem Barium angefüllt war [6]. Die Verdampfungsvorrichtung war so angeordnet, und die Kühlung mit flüssiger Luft war so weit über die Gefäßwand ausgedehnt, daß keine Störungen durch Auf-

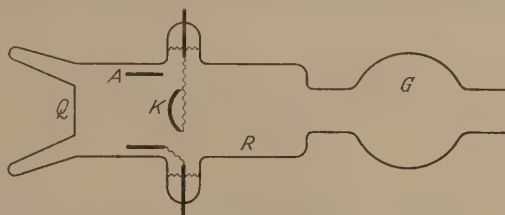


Abb. 2. Schematische Darstellung des Rezipienten:  $K$  Kathode;  $A$  Anode;  $Q$  Quarzfenster.

treten von Bariumdampfspuren in dem Rezipienten zu erwarten waren. Diese Vorsichtsmaßnahme ist insofern wichtig, als bereits Spuren von Bariumdampf zu Änderungen in der Elektronenaustrittsarbeit des Wolframs führen, die größenordnungsmäßig mit den Änderungen vergleichbar sind, welche bei der Adsorption, bzw. Desorption von aktiven Restgasmolekeln beobachtet werden sollen. Es werden hierbei nicht nur die Absolutwerte der Austrittsarbeit geändert, auf die es bei den hier zu besprechenden Messungen gar nicht so sehr ankommt, sondern darüber hinaus leidet die Reproduzierbarkeit der Messungen.

Zur Druckkontrolle bis etwa  $10^{-8}$  Torr war zwischen der Getterkammer und der Falle  $F_3$  in geringer Entfernung von dem Rohrquerschnitt  $S-S$ , an dem später der Rezipient mit der Getterkammer abgeschmolzen werden sollte, ein Ionisationsmanometer eingesetzt. Die Meßwerte dieses Ionisationsmanometers waren im Laufe einer Voruntersuchung mittels einer gleichartigen Apparatur mit den Meßwerten eines zweiten Ionisationsmanometers verglichen worden, dessen Meßsystem sich unmittelbar innerhalb des Rezipienten und nicht innerhalb einer besonderen Manometerrohre befand. Im Inneren des Rezipienten



war der Wolframblechstreifen, für den die Zeitabhängigkeit der Elektronenaustrittsarbeit auf photoelektrischem Wege ermittelt werden sollte, gegenüber einem Quarzglasfenster  $Q$  (Abb. 2) angebracht, das mit Hilfe der entsprechenden Übergangsgläser in die Hartglasapparatur eingeschmolzen wurde. Der untere Teil des Rezipienten konnte in ein Dewar-Gefäß getaucht werden. Als Zuleitungen für das Kathodenblech und den Anodenzyylinder aus Wolfram wurden Wolframdrähte, bzw. Wolframstäbe benutzt.

Die photoelektrische Meßanordnung war in ähnlicher Weise wie bei C. E. MENDENHALL und CH. F. DEVOE [7] aufgebaut. Die Lichtquelle (Quarzquecksilberlampe) und der Doppelmonochromator waren auf einem massiven Drehtisch angeordnet. Für Vergleichsmessungen diente eine geeichte Vakuumthermosäule, deren Quarzglasfenster mit dem der Meßzelle übereinstimmte. Die Eichung der Thermosäule wurde im Laufe der Untersuchungen mehrmals wiederholt. Die Photoströme wurden mittels Elektrometerröhre (FP 54, Gen. El.) gemessen [8]. Für den Schutz gegenüber elektrostatischen Störungen und einem Einfluß der Feuchtigkeit der umgebenden atmosphärischen Luft wurde besondere Sorge getragen.

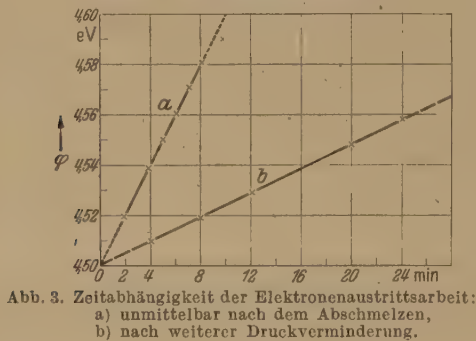


Abb. 3. Zeitabhängigkeit der Elektronenaustrittsarbeit:  
a) unmittelbar nach dem Abschmelzen,  
b) nach weiterer Druckverminderung.

#### Vorbereitung und Durchführung der Experimente.

Die Apparatur wurde mittels der beiden Diffusionspumpen bis auf etwa  $10^{-6}$  Torr evakuiert, während sie sich mit nahezu allen ihren Bauteilen auf der Hochvakuumseite der Pumpen, im wesentlichen mit Ausnahme der Falle  $F_1$  und eines geringen Teiles der Glasleitung auf einer Temperatur von  $350^\circ\text{C}$  befand. Es erwies sich als unbedingt notwendig, daß die Kühlfalle  $F_1$  von Beginn des Evakuierens an wirksam war. Diesem Evakuierungsprozeß war vorausgegangen: das Ausheizen aller Glasteile einschließlich der Falle  $F_1$ , das Glühen der Wolframspirale der Getterkammer vor dem Einlegen des Getterröhrchens, das Ausheizen der Metallteile des Rezipienten durch Stromdurchgang, bzw. Elektronenbombardement und Hochfrequenzheizung für den Anodenring, das Ausheizen des Aluminiumoxydgetterröhrchens, die Mehrfachdestillation und das Einfüllen des Bariums in das Aluminiumoxydröhrchen, die sorgfältige Entgasung der Aktivkohle durch mehrwöchiges Ausheizen. Alle diese Vorbereitungen wurden in einer besonderen Apparatur im Hochvakuum an der Pumpe durchgeführt. Die thermische Vorbehandlung der Bauelemente der Apparatur im Hochvakuum ergab sich als wesentlich für den späteren Evakuierungsprozeß.

Nachdem in der zusammengesetzten Apparatur das Hochvakuum von etwa  $10^{-6}$  Torr erreicht war, begann der Ausheizprozeß im engeren Sinne, dem jetzt die gesamte Hochvakuumapparatur mit Ausnahme der

Falle  $F_1$  und ihrer Umgebung unterworfen wurde. Falle  $F_1$  durfte während dieses Ausheizprozesses niemals außer Betrieb gesetzt werden. Die Apparatur wurde nach einem in Voruntersuchungen als günstig gefundenen Ausheizschema mit allmählich steigender Temperatur [9] 20 Tage lang an der Pumpe bei Temperaturen oberhalb  $350^\circ\text{C}$ , die kurzzeitig bis  $480^\circ\text{C}$  gesteigert wurden, ausgeheizt. Die Aktivkohle wurde innerhalb dieses Zeitraumes wiederholt kurzzeitig durch Hochfrequenzheizung auf etwas höhere Temperaturen gebracht. Die Elektroden im Rezipienten wurden innerhalb der Ausheizperiode mehrmals durch unmittelbaren Stromdurchgang, sowie durch Elektronenbombardement und Hochfrequenzheizung (Anode) ausgeglüht. Dabei konnten die Zuleitungen zum Teil nur auf eine relativ geringe Temperatur gebracht werden, die für eine gründliche Entgasung keineswegs ausreichend war. Aber die Meßtemperatur der Zuleitungen lagen während des Ausheizprozesses um so viel höher als die später bei Messen oder auch Glühen in der abgeschmolzenen Röhre von ihnen angenommenen Temperaturen, die Wahrscheinlichkeit von wesentlichen Störungen durch Gasen der Zuleitungen beim späteren Meßvorgang sehr gering war.

Das Vakuum war am Ende der Ausheizperiode etwas besser als  $10^{-6}$  Torr, während sich nahezu die gesamte Hochvakuumapparatur bei einer Temperatur von ungefähr  $400^\circ\text{C}$  befand. Bis zum Abschmelzen des Rezipienten und der Getterkammer diente ein Ionisationsmanometer zur Beurteilung des Vakuums.

Nun begannen die Vorbereitungen für das Abschmelzen. Die Kohlefalle  $F_2$  wurde zunächst bis auf die Zimmertemperatur, dann bis auf die Temperatur der festen Kohlsäure in Azeton und schließlich auf die Temperatur der flüssigen Luft abgekühlt. Die Abschmelzzone wurde besonders sorgfältig ausgeheizt [10]. Die Kohlefalle  $F_3$  wurde eingekühlt, die Getterkammer wurde in ein Dewar-Gefäß mit flüssiger Luft getaucht. Ein dünner Bariumdraht wurde auf der gekühlten Gefäßwand niedergeschlagen. Gleichzeitig wurde der Rezipient abgeschmolzen, während die Messung mittels des Ionisationsmanometers ein Hochvakuum von etwa  $10^{-8}$  Torr vermaß, nachdem die Abschmelzzone des Rohres vorher noch einmal auf extrem zulässige Temperaturen erhitzt worden war.

#### Experimentelle Ergebnisse.

Gleich nach dem Abschmelzen des Rezipienten wurde das Kathodenblech kurzzeitig auf  $230^\circ\text{C}$  erhitzt. Die Getterkammer tauchte während der nachfolgenden Messungen immer in ein Dewar-Gefäß mit flüssiger Luft. Der Spiegel der flüssigen Luft durfte im Laufe der Zeit nicht gesenkt werden. Nach dem Ausglühen der Kathode wurde die Austrittsarbeit in Abhängigkeit von der Zeit verfolgt. Die ersten Messpunkte wurden nach Abschalten des Glühstromes solchen Zeiten an aufgenommen, bei denen Änderungen in der Austrittsarbeit infolge fortgesetzter Abkühlung des Kathodenblechess selbst bei Annahme der höchsten in der Literatur angegebenen Werte des Temperaturkoeffizienten mit Sicherheit ohne Einfluß auf die Ergebnisse waren.

Als erster Wert, der der Zimmertemperatur zugeordnet und nach mehrmaligem Glühen immer wieder



halb der Grenzen der Meßgenauigkeit reproduziert werden konnte, wurde  $\varphi = 4,52 \pm 0,02$  eV nach unten gefunden. Wenn man voraussetzt, daß die Punkte auf einer Geraden liegen (Abb. 3), so ergibt bei Extrapolation ein Anfangswert von  $\varphi = 4,50$  eV die reine W-Oberfläche. Ähnliche Werte werden in der Literatur als Ergebnisse bei solchen Untersuchungen angegeben, die unter vergleichbaren experimentellen Bedingungen durchgeführt worden sind [11]. Innerhalb der Grenzen der Meßgenauigkeit darf aber auch der obere Wert  $\varphi = 4,59$  eV offensichtlich eine lineare Beziehung zwischen  $\varphi$  und  $t$  angenommen werden. Bei höheren Werten von  $\varphi$  zeigt sich deutlich die Krümmung der  $\varphi$ - $t$ -Kurve in dem Sinne, daß  $t$  abnimmt. Wenn beim wiederholten Ausglühen der Kathode immer wieder die gleiche Ausglühtemperatur und Zeit verwandt wird, so läßt sich bei sonst gleichbleibenden experimentellen Bedingungen auch eine  $\varphi$ - $t$ -Gerade befriedigend reproduzieren. Es sei

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \text{konst.} \cdot \frac{p}{\sqrt{MT}} \approx \frac{p}{\sqrt{MT}}$$

Anzahl der aktiven Restgasmolekeln, die bei einem Druck von  $p$  Torr in 1 sec auf die Flächeneinheit des Kathodenbleches treffen.  $\Delta\varphi$  ist also zu  $p$  proportional. Man nimmt an, daß bei geringen Bedeckungsgraden die Kondensationsgeschwindigkeit der Restgasmolekeln konstant ist und daß der Beitrag jedes adsorbierten Gasteilchens zur Erhöhung der Austrittsarbeit gleich ist, so darf man  $\Delta\varphi$  zu  $\Delta\varphi$  proportional und  $t$  für gleichbleibenden Druck gleich einer Konstante setzen, die für den Druck charakteristisch ist. Es ist aber

$$\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_{p=\text{konst.}} = C.$$

Die Voraussetzungen für diese groben Überlegungen erscheinen zwar gewagt, erfahren aber durch die relativ große Ungenauigkeit in den Messungen der Austrittsarbeit einerseits und durch die experimentell gefundene lineare Beziehung andererseits eine gewisse Rechtfertigung, soweit die Fragestellung sich auf die Anwendbarkeit der Beziehungen für Vakuummeßgeräte bezieht.

Nach der Aufnahme der ersten  $\varphi$ - $t$ -Geraden und nach der Feststellung ihrer Reproduzierbarkeit wurden nach einem bestimmten Zeitschema [12] auf der Innenseite der Getterkammer nacheinander dünne Bariumschichten niedergeschlagen, die jeweils eine Schichtdicke von nur wenigen Atomdurchmessern haben konnten. Der untere Teil des Rezipienten wurde in flüssige Luft getaucht. Auch hier mußte sorgfältig die konstante Temperatur des Spiegels der flüssigen Luft bei den nachfolgenden Messungen beachtet werden. Die jetzt nach dem Ausglühen der Kathode aufgenommene  $\varphi$ - $t$ -Gerade (Abb. 3, b) zeigte deutlich eine geringere Steigung als die erste Gerade, die unmittelbar nach dem Schmelzen gewonnen wurde. Die Abnahme in der Steigung der Geraden entspricht aber einem besseren Hochvakuum. Unter den angegebenen Voraussetzungen kann aus dem Steigungsverhältnis der beiden Geraden die Druckverminderung entnommen werden. Man läßt man die Steigung der ersten Geraden etwa als Meßwerte eines Ionisationsmanometers an, so lassen sich auch Zahlenwerte für den Druck und für die weiteren Druckänderungen in Torr angeben. Geht man

hingegen unter verschiedenen experimentellen Bedingungen von dem gleichen Meßwert des gleichen Ionisationsmanometers vor dem Abschmelzen des Rezipienten von der Pumpe aus, so hängt der Verlauf der  $\varphi$ - $t$ -Kurven von den besonderen experimentellen Bedingungen ab. Von Einfluß sind u. a. die Entgasungsbehandlung, der Verlauf des Abschmelzprozesses, die Größe der inneren Oberfläche des Rezipienten, die Anordnung der Bauteile des Rezipienten in bezug auf das vor dem Messen auszuglühende Kathodenblech, die für den Rezipienten und seine Innenteile gewählten Werkstoffe und die Gesamtaktivität des Getterfilmes. Bei den vielfachen Unsicherheiten im Bereich niedrigster Drucke muß man also zweifellos solche Zahlenwerte, die den Druck in Torr angeben, mit größter Vorsicht aufnehmen. Außerdem würden sich diese Zahlen nur auf den Partialdruck der aktiven Restgaskomponente beziehen. Die gleiche, nicht weniger ernsthafte Mahnung läßt sich jedoch auch für die Deutung der Meßergebnisse aussprechen, die mit einem Ionisationsmanometer im Bereich sehr niedriger Drucke gefunden werden. Es sei hier vor allem an die neuere Untersuchungen gedacht, nach denen dem Ionisationsmanometer in gewissen Spezialausführungen offensichtlich noch Drucke unterhalb von  $10^{-8}$  Torr zugänglich sind [13]. Ganz allgemein darf man wohl feststellen, daß eine Druckbestimmung unterhalb  $10^{-7}$  Torr je nach den Anforderungen an die Zuverlässigkeit der Ergebnisse und an die Güte des Hochvakuums eher ein mehr oder weniger schwieriges und von Vor- und Nebenuntersuchungen begleitetes physikalisches Experiment als eine Messung im üblichen Sinne ist.

Nahm man nun die Kühlung am unteren Teil des Rezipienten fort und senkte den Spiegel der flüssigen Luft bei der Getterkammer etwas, so wurde der Anstieg der Geraden bedeutend steiler. Die Bedeutung des beschriebenen Meßverfahrens liegt in der Möglichkeit, relative Druckänderungen im Bereich niedrigster Drucke festzustellen, in dem alle übrigen Hochvakuummeßinstrumente, vielleicht mit Ausnahme der erwähnten Spezialform des Ionisationsmanometers, versagen. Darüber hinaus entspricht dieses Kriterium einer relativen Druckänderung den besonderen Bedürfnissen, die bei vielen Untersuchungen der Oberflächenphysik im Bereich niedrigster Drucke um und unter  $10^{-8}$  Torr vorliegen insofern, als damit gleichzeitig Angaben über die Zeit vorliegen, während der man mit bestimmten gewünschten Reinheitsgraden rechnen kann. In einer Arbeit von L. APKER, E. TAFT und J. DICKEY [11] wird über Meßwerte des Ionisationsmanometers hinaus der aktive Gasdruck durch die Angabe gekennzeichnet, daß die Austrittsarbeit von Wolfram innerhalb von 4 Tagen um 0,5 eV auf einen Gleichgewichtswert gestiegen ist. Auch die Angabe eines solchen Gleichgewichtswertes kann zwar als Hochvakuummaß benutzt werden, aber es erscheint in dieser vereinfachten Form keine Möglichkeit gegeben, relative Druckänderungen zahlenmäßig festzulegen. Eine Druckbeurteilung („vacuum test“) auf Grund der Beobachtung der Elektronenaustrittsarbeit nennt bereits ANDERSON [2] in einer Untersuchung über die Kontaktpotentialdifferenz zwischen Wolfram und Barium vorteilhafter als eine Messung mittels des Ionisationsmanometers. Das Hochvakuum gilt als ausreichend, wenn sich innerhalb der für die späteren



Messungen notwendigen Zeit die Austrittsarbeit nicht mehr meßbar ändert. Aber ANDERSON geht nicht näher auf die Zeitabhängigkeit ein. Bei Kontaktpotentialdifferenzmessungen gibt es grundsätzliche Schwierigkeiten. Man muß im Bereich niedrigster Drucke Änderungen in der Austrittsarbeit der Bezugselektrode erwarten. Derartige Änderungen sind vor allem dann störend, wenn eine Elektrode sich während der Messungen auf erhöhter Temperatur befindet. Andererseits können Kontaktpotentialdifferenzmessungen gerade in bezug auf die Zeitabhängigkeit der Austrittsarbeit wertvoller als photoelektrische Messungen der beschriebenen Art sein, weil sie vor allem über den Beginn des Adsorptionsprozesses bei höherer Meßgenauigkeit besseren Aufschluß geben. F. FIANDA und E. LANGE [14] geben derartige Kurven für geringe Adsorptionszeiten für Oberflächen an, die durch Schaben im Hochvakuum erzeugt werden. Diese Messungen beziehen sich allerdings nur auf ein Vakuum von etwa  $10^{-5}$  Torr. Eine  $\varphi$ - $t$ -Kurve, die in dem steilen Anstieg mit unserer  $\varphi$ - $t$ -Geraden zu vergleichen ist, weil sie unter ähnlichen Bedingungen wie unsere Messungen gewonnen wurde, ist von H. E. FARNSWORTH und R. P. WINCH [5] für Silber gefunden worden. An diese Untersuchungen knüpft A. G. EMSLIE eine Diskussion über den Adsorptionsmechanismus an [15].

### Zusammenfassung.

Unterhalb  $10^{-7}$  Torr kann die Zeitabhängigkeit Elektronenaustrittsarbeit, die auf photoelektrische Wege nach der Methode von R. H. FOWLER ermittelt wird, für eine durch Glühen gereinigte Wolframoberfläche als Kriterium zur Beurteilung von Druckänderungen benutzt werden.

**Literatur.** [1] DUSHMAN, S.: „Scientific Foundations of Vacuum Technique“, New York: John Wiley & Sons 1949. — [2] JAECKEL, R.: „Kleinste Drucke, ihre Messung und Erzeugung“, Berlin: Springer 1950; MÖNCH, G. CHR.: „Hochvakuumtechnik“, Pößneck: R. A. LANG 1950. — [3] ANDERSON, P. A.: Phys. Rev. **47**, 958 (1935); **49**, 320 (1936). — [4] FOWLER, R. H.: Phys. Rev. **38**, 45 (1931). — [5] FARNSWORTH, H. E. u. R. P. WINCH: Phys. Rev. **58**, 812 (1940). — [6] HAASE, G.: Z. angew. Phys. **2**, 188 (1950). — [7] MENDENHALL, C. E. u. C. H. F. DEVORE: Phys. Rev. **51**, 346 (1937). — [8] DUBRIDGE, L. A. u. BROWN: Rev. Sci. Instr. **4**, 532 (1933); BARTH, G.: Phys. **87**, 399 (1934). — [9] DUSHMAN, S.: l. c. S. 732. — [10] NOTTINGHAM, W. B.: Phys. Rev. **55**, 203 (1939). — [11] MENDENHALL u. DEVORE: l. c.; APKER, L., TAFT, E. J. DICKEY: Phys. Rev. **73**, 46 (1948). — [12] Erscheint demnächst an dieser Stelle. — [13] BAYARD, R. T. u. D. ALPERT: Rev. Sci. Instr. **21**, 571 (1950). — [14] FIANDA, F. E. LANGE: Z. Elektrochem. u. angew. phys. Chem. **55**, 1 (1951). — [15] EMSLIE, A. G.: Phys. Rev. **60**, 458 (1948).

Prof. Dr. M. SEDDIG u. Dr. rer. nat. habil. G. HAASE  
Institut für angewandte Physik  
der Universität Frankfurt a. M., Robert Mayerstr. 2

## Berichte.

### Einfluß elektrischer Ladungen auf das Verhalten von Hochpolymeren.

Von WERNER KUHN, Basel\*.

Mit 12 Textabbildungen.

(Eingegangen am 15. November 1951.)

#### 1. Wichtigkeit der Gestalt von Makromolekülen.

Das praktische Verhalten hochpolymerer Substanzen wird weitgehend durch die Gestalt der Makromoleküle bestimmt. Die Besprechung eines Einflusses elektrischer Ladungen auf das praktische Verhalten von Hochpolymeren wird daher weitgehend eine Besprechung der *Gestaltänderungen* sein, welche durch elektrische Ladungen an den Molekülen hervorgerufen werden. Wir werden uns zuerst mit der Gestalt von linearen Hochpolymeren und sodann mit der Beeinflussung von räumlichen Netzwerken befassen.

Betrachten wir zunächst ein Einzelmolekül einer linearen hochpolymeren Substanz wie Paraffin, Cellulose oder Polyacrylsäure, so stellen wir fest, daß ein solches Molekül etwa aus  $Z$  linear aneinander gefügten, durch Hauptvalenzen miteinander verknüpften Grundmolekülen besteht. Die Größe  $Z$  wird als *Polymerisationsgrad* bezeichnet. Bezeichnen wir mit  $b$  die etwa aus Röntgendaten zu bestimmende, in der Kettenrichtung gemessene Länge des monomeren Restes, so ist offenbar die der Fadenachse entlang gemessene Gesamtlänge des Fadens gleich

$$L = Z \cdot b \quad (1)$$

(Abb. 3a). Die wirkliche Gestalt eines solchen Mole-

küls wird aber nicht die einer gerade gestreckten Zickzackkette, sondern die eines losen Knäuels oder einer losen unregelmäßigen Spirale sein. Abb. 1 gibt ein Bild davon, wie die Gestalt eines Paraffinmoleküls, welches 500 C-Atome enthält, in einem Lösungsmittel wie Benzol oder Hexan in Wirklichkeit etwa aussieht. Man hat sich vorzustellen, daß die Gestalt eines solchen Moleküls durch Betätigung von Achsen mehr oder weniger vollkommener Drehbarkeit dauernd verändert wird. In einer Lösung, welche viele Moleküle vom selben Polymerisationsgrad enthält, werden somit eine verschiedensten Molekülformen nebeneinander vorkommen und in dauerndem Wechsel ineinander übergehen. Im Grunde genommen ist bereits die Angabe der Gestalt eines einzelnen Moleküls, etwa die Angabe der Gestalt des in Abb. 1 dargestellten Moleküls ein Problem, und noch viel problematischer ist die Angabe einer „mittleren Gestalt“ der in einer Gesamtheit ähnlicher Moleküle vorkommenden Molekülindividen. Es hat sich indessen gezeigt, daß bereits eine einzige Größe, nämlich der Abstand  $h$  zwischen Anfangspunkt und Endpunkt die Eigenschaften des einzelnen Fadenmoleküls weitgehend festlegt. Dem entsprechend können wir auch die praktischen Eigenschaften, welche an einer Gesamtheit von Molekülen beobachtet werden, weitgehend überblicken, wenn wir die Häufigkeit, mit der in einer solchen Gesamtheit die verschiedenen  $h$ -Werte vertreten sind, angeben.

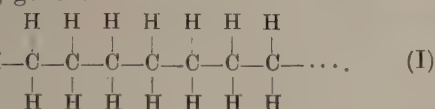
\* Vortrag, gehalten auf der Tagung des Verbandes deutscher physikalischer Gesellschaften in Karlsruhe am 23. September 1951.



## 2. Statistisches Fadenelement.

Um zu statistischen Aussagen über die Häufigkeit in einer Gesamtheit von Fadenmolekülen vom Polymerisationsgrade  $Z$  vorkommen den  $h$ -Werte zu kommen, hat die Einführung des sogenannten *statistischen Fadenelementes* bereits [1], [2]. Wir geben nachstehend eine kurze anschauliche Bedeutung und Erläuterung dieses Begriffes und werden diese etwas häufige Begründung nachher durch eine genaue und einwandfreie Definition ersetzen (s. u. (8)).

Zu einer ersten Begründung des *statistischen Fadenelementes* gehen wir dadurch, daß wir, etwa einem Paraffinkohlenwasserstoff (Formel I) vom Molekülungspunkt aus der Kette entlanggehen.



Fortschrittsrichtung vom ersten zum zweiten Kohlenstoffatom legen wir etwa in die  $z$ -Richtung des  $x, y, z$ -Koordinatensystems (Abb. 2). Die Fortschrittsrichtung vom zweiten zum dritten Kohlenstoffatom wird dann, da der Valenzwinkel bei Paraffinkohlenwasserstoffen etwa  $109^\circ$  beträgt, nicht mehr in  $z$ -Richtung liegen, sondern mit dieser Richtung einen Winkel von etwa  $71^\circ$  bilden. Dabei sind alle Richtungen, welche durch Rotation des durch die Punkte 1, 2 und 3 von Abb. 2 gebildeten Vektors um die Richtung 1—2 als Achse hervorgehen, gleich wahrscheinlich. Die Richtung vom dritten zum vierten Kohlenstoffatom wird mit dem vom zweiten zum dritten Kohlenstoffatom führenden Vektor wiederum einen Winkel von  $109^\circ$  einschließen, wobei unter Umständen einzelne Stellungen, welche durch Rotation des Vektors 3—4 um die Richtung 2—3 als Achse hervorgehen, etwas bevorzugt sein können [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. Gehen wir in solcher Weise vom vierten zum fünften und dann vom fünften zum sechsten Kohlenstoffatom der Kette, so werden wir feststellen, daß die *Unsicherheit* darüber, an welcher Stelle wir uns nach dem letzten Schritt befinden, und die *Unsicherheit* darüber, in welcher Richtung sich das nächste Kettenglied an die vorhandene Kette anschließen wird, *rasch zunimmt*. Das Ergebnis ist, daß wir nach Durchlaufung etwa von  $s_m$  monomeren Resten praktisch genommen völlig unsicher sind über die Richtung, in welcher die nächstfolgenden Schritte führen werden. Wir fassen daher je  $s_m$  in der Kette aufeinander folgende monomere Reste zu einer Einheit, welche wir als *statistisches Fadenelement* bezeichnen, zusammen. Das statistische Fadenelement hat im Mittel eine Länge, welche wir mit  $A_m$  bezeichnen, besitzen. Die wesentlichste Eigenschaft des Elementes besteht darin, daß die Richtung eines vorgegebenen statistischen Fadenelementes völlig unabhängig ist von der Orientierung aller in der Kette vorangehenden und nachfolgenden statistischen Fadenelemente. Für eine große Zahl von Beispielen ist die Länge  $A_m$  des statisti-

sches Fadenelementes, sowie die Größe von  $s_m$  (Zahl der monomeren Reste in einem statistischen Fadenelement) in Tabelle 1 zusammengestellt.

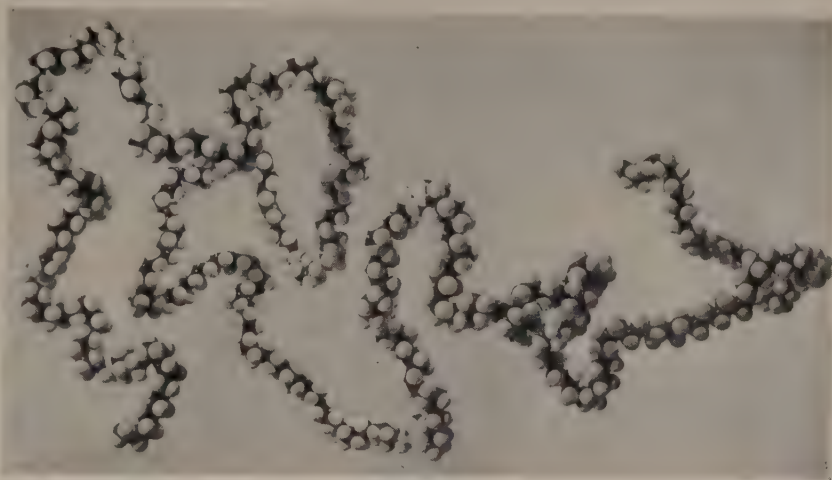


Abb. 1. Wahrscheinliche Gestalt (statistischer Knäuel) des Moleküls eines normalen Paraffinkohlenwasserstoffes von der Formel  $\text{C}_{300}\text{H}_{602}$  in Benzol oder Cyclohexan.

Tabelle 1. Länge  $A_m$  und Molgewicht  $M_A$  des statistischen Fadenelementes sowie Werte von  $s_m$  für einige hochpolymere Stoffe.

Substanz	Lösungsmittel	$s_m$	$M_A$	$A_m$
Cellulose	Kupferoxyd-Ammoniak	9,7	1600	$50 \cdot 10^{-8}$ cm
Methylcellulose	Wasser	25	4300	$130 \cdot 10^{-8}$ „
Paraffin	Benzol	12	170	$16 \cdot 10^{-8}$ „
Polyacrylsäure	Wasser	10	840	$25 \cdot 10^{-8}$ „
Polystyrol	Toluol	14	1400	$35 \cdot 10^{-8}$ „
Polyvinylchlorid	Dioxan	9	560	$22 \cdot 10^{-8}$ „

## 3. Aussagen über die relative Häufigkeit eines Abstandes $h$ zwischen den Fadenenden in einer sich selbst überlassenen Lösung.

Für statistische Betrachtungen über die in einer Gesamtheit von Fadenmolekülen vorkommenden Molekülgestalten ersetzen wir jetzt den aus  $Z$  monomeren Resten bestehenden Faden durch ein aus

$$\frac{Z}{s_m} = N_m \quad (2)$$

statistischen Fadenelementen bestehendes Modell, wobei die Länge des statistischen Fadenelementes gleich

$$A_m = s_m \cdot b \quad (3)$$

ist. Das Modell besitzt dann, bei völliger Streckung, ebenfalls die Gesamtlänge

$$L = N_m A_m = Z \cdot b \quad (4)$$

(Abb. 3a und 3b). Gehen wir, um Aussagen über die Gestalt des aus  $N_m$  statistischen Fadenelementen bestehenden Gebildes zu machen, wieder vom Anfangspunkt aus dem Faden entlang, so führt uns der erste Schritt um eine Strecke  $A_m$ , beispielsweise wieder in die positive  $z$ -Richtung. Nach Durchlaufung dieser Strecke haben wir dann etwa durch Würfeln die Richtung, in welcher wir vom Endpunkt des ersten zum

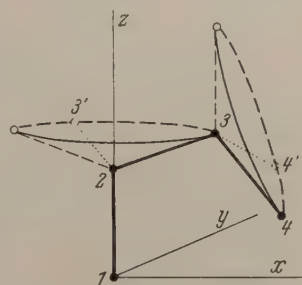


Abb. 2. Zunahme der Unbestimmtheit des Ortes, an dem sich die einzelnen Kettenglieder befinden und der Fortschrittsrichtung von einem Kettenglied zum nächsten beim Vorrücken entlang einer Kette.



Endpunkt des zweiten Fadenelementes weiterzugehen haben, festzustellen, indem ja die kennzeichnende Eigenschaft des statistischen Fadenelementes gerade darin besteht, daß die Fortschrittingsrichtungen aufeinanderfolgender statistischer Fadenelemente von-

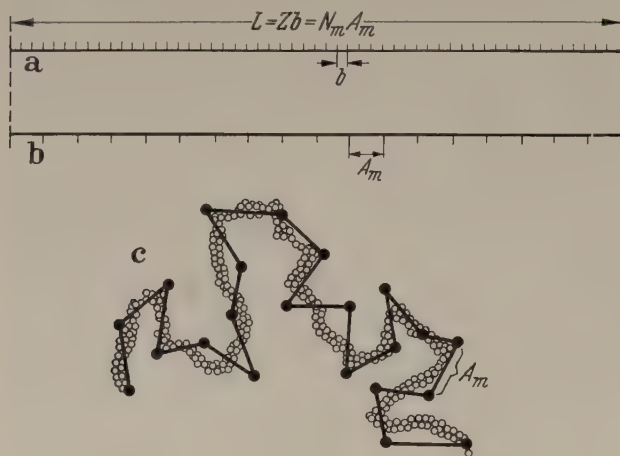


Abb. 3. Ein Molekül, welches aus  $Z$  monomeren Resten aufgebaut ist, von denen ein jeder in der Fadenrichtung die Länge  $b$  besitzt, hat die Gesamtlänge  $L = Z \cdot b$  (Abb. 3a). Wir ersetzen es durch ein aus  $N_m$  statistischen Fadenelementen der Länge  $A_m$  bestehendes Modell, in solcher Weise, daß  $N_m \cdot A_m$  wiederum gleich  $Z \cdot b$  wird (Abb. 3b). Das Modell, sowie auch das wirkliche Molekül wird in Lösung eine unregelmäßige Gestalt annehmen (statistisches Knäuel, Abb. 3c), wobei der Abstand der Fadenenden viel kleiner als  $L$  sein wird.

einander unabhängig sind. Entsprechendes gilt für das Fortschreiten vom zweiten zum dritten, dann zum vierten usw. Fadenelement. Wenn wir in solcher Weise dem von den statistischen Fadenelementen gebildeten Linienzug folgen, erhalten wir offenbar ein ähnliches Gebilde, wie wenn wir den Weg eines in

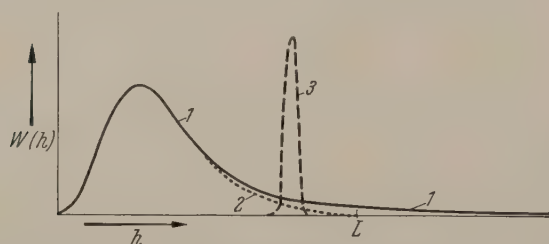


Abb. 4. Häufigkeitsverteilung  $W(h)$  bei einer Gesamtheit von Makromolekülen. Abszisse: Abstand zwischen den Endpunkten der einzelnen Molekülindividuen. Ordinate: Häufigkeit, mit welcher der Abstand  $h$  angetroffen wird. Kurve 1 (stark schematisch): Normalverteilung erster Näherung, entsprechend Gleichung (5). Kurve 2: Normalverteilung, in welche aus Wahrscheinlichkeitsgründen jede andere Verteilung, sobald die Molekülpunkte nicht festgehalten werden, übergeht. Bessere Näherung, nach welcher  $W(h)$  für  $h > L$  gleich Null wird; entsprechend Gleichung A 1,5. Kurve 3: Beispiel einer künstlich herbeigeführten, nicht normalen Abstandsverteilung, bei welcher der Abstand zwischen den Endpunkten bei allen Individuen nahezu denselben Wert besitzt.

einer Flüssigkeit suspendierten Kolloidteilchens in der Weise aufzeichnen, daß wir, beispielsweise nach je 10 Sekunden, den Ort des Teilchens feststellen und die so nacheinander gefundenen Punkte durch Geraden miteinander verbinden (Abb. 3c). Tatsächlich wird auch das Kolloidteilchen in 10 Sekunden im Mittel je einen Weg von der Größe  $A$  zurücklegen und es wird auch die Richtung, in welcher die in einem herausgegriffenen Zeitintervall erfolgende Verschiebung des Teilchens erfolgt (Richtung des Vektors  $A$ ) von der Fortschrittingsrichtung, welche in dem vorangehenden Zeitintervall verwirklicht war, unabhängig sein. In ähnlicher Weise wie wir über den Weg, welchen ein solches Teilchen in  $N \cdot 10$  Sekunden zurücklegt, statistische Aussagen machen können, können wir offen-

bar auch über den Abstand, um den wir uns bei Durchlaufung von  $N_m$  statistischen Fadenelementen vom Anfangspunkt des Moleküls entfernt haben, also über den Abstand  $h$  zwischen Anfangs- und Endpunkt eines aus  $N_m$  statistischen Fadenelementen bestehenden Fadens, zuverlässige statistische Angaben machen. Wie erwähnt, kommen nebeneinander sehr verschiedene Abstände vor. In erster Näherung ergibt sich als Wahrscheinlichkeit  $W(h) dh$  dafür, daß der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt eines herausgegriffenen Moleküls einen zwischen  $h$  und  $h + dh$  liegenden Betrag besitzt, die Beziehung

$$W(h) dh = \text{const } e^{-\frac{3 h^2}{2 N_m A_m^2}} dh.$$

Der Wert der in dieser Formel vorkommenden Konstante kann der im Anhang angegebenen Formel (A 1,2) entnommen werden. Der dem Ausdruck (5) entsprechende Funktionsverlauf ist in Abb. 4, Kurve 1 wiedergegeben.

Aus der Formel und auch aus der Abbildung (der letzteren etwas übertrieben wiedergegeben) erkennt man, daß der in Gl. (5) beschriebene Sachverhalt *nicht genau richtig* sein kann: nach (5) würde sich für Werte von  $h$ , welche größer als  $L = N_m A_m$  sind, eine *endliche* Wahrscheinlichkeit ergeben. Es bestünde also eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt des Fadens größer ist als die Länge  $L$  des vollständig gestreckten Fadens [s. Abb. 3a u. b]. In Wirklichkeit soll  $W(h)$  für  $h = L$  verschwinden, was aber nach (5) erst für  $h = \infty$  der Fall ist.

Für Lösungen nichtgeladener Fadenmoleküle ist diese im Ausdruck (5) enthaltene Unrichtigkeit ohne praktische Bedeutung; sie wird aber wichtig in dem weiter unten zu behandelnden Falle elektrisch geladener Fadenmoleküle, indem die elektrische Aufladung eine praktisch völlige Streckung der Fäden, d. h. eine Verschiebung des Maximums der Verteilungsfunktion in die Nähe von  $h = L$  bewirken wird. (s. Abb. 4). Um die Verteilungsfunktion beim elektrisch geladenen Faden mitbehandeln zu können, wird es also erforderlich sein, im Falle des Ausdrucks (5) eine berechnete für den nichtgeladenen Faden gültige *genauere Verteilungsfunktion* zu finden. Dies ist möglich [8] und die entsprechenden Formeln sind im Anhang angegeben (Gl. A 1,2 bis A 1,6).

Die Notwendigkeit, den Ausdruck (5) gegebenenfalls zu vervollständigen, deuten wir dadurch an, daß wir, unter Hinweis auf (A 1,6), setzen:

$$W(h) dh = \text{const } e^{-\left(\frac{3 h^2}{2 N_m A_m^2} + \dots\right)} dh.$$

Es ist, sobald die Verteilungsfunktion hinsichtlich  $h$  gemäß Gl. (5) oder (6) bekannt ist, möglich, für eine Gesamtheit von Fadenmolekülen die Mittelwerte  $\bar{h}$ , usw. anzugeben. Als wichtige Beziehung dieser Art erwähnen wir die aus (5) folgende Beziehung für den quadratischen Mittelwert von  $h$ :

$$\bar{h}^2 = N_m A_m^2.$$

Sie besagt, daß der quadratische Mittelwert von  $h$  proportional mit  $N_m$  oder (bei Berücksichtigung von (A 1,6)) proportional mit dem Polymerisationsgrade  $Z$  zunimmt.



Die Beziehung (7) ist auch deswegen erwähnenswert, weil sie zusammen mit der Beziehung (4) eine *deutige willkürfreie Bestimmung der Länge  $A_m$  des statistischen Fadenelementes* gestattet. Wenn es bei einer Substanz von gegebenem Polymerisationsgrad  $Z$  damit von gegebener Fadenlänge  $L$  möglich ist, und wie, auf theoretischem oder experimentellem Wege die Größe des mittleren Abstandsquadrates  $\bar{h}^2$  zu ermitteln, so kann für diese Substanz durch Bildung des Quotienten aus (7) und (4) die Länge des statistischen Fadenelementes ermittelt werden. Wir können so erhaltene Beziehung

$$A_m = \frac{\bar{h}^2}{L} \quad (8)$$

man eigentlich als *Definition des statistischen Fadenelementes betrachten* anstelle der im Vorigen beschriebenen anschaulichen aber nicht ganz eindeutigen Bestimmung dieser Größe.

Mit Hilfe der Beziehungen (4) und (8) ist es möglich, dem tatsächlichen Molekülfaden ein aus statistischen Fadenelementen bestehendes Modell solcher Art zu stellen, daß zwischen tatsächlichem Faden und Modell eine exakte Übereinstimmung sowohl hinsichtlich des mittleren Abstandsquadrates der Fadenenden (nach Gl. (7)) als auch hinsichtlich der Gesamtlänge  $L$  des Fadens (nach Gl. (4)) besteht.

Offenbar gestattet die Einführung des statistischen Fadenelementes die Durchführung einer einwandfreien statistischen Behandlung aller die Molekülform betreffenden Fragen. So kann beispielsweise mit Hilfe solcher Betrachtungen die Frage beantwortet werden, in dem mittleren reziproken Abstand, der zwischen dem  $i$ -ten und  $i + k$ -ten statistischen Element eines Fadens angetroffen wird, dessen Enden in einem Abstande  $h$  voneinander festgehalten werden.

*Rückstellkraft bei Fäden, deren Enden in bestimmtem Abstande  $h$  voneinander festgehalten werden.*

Wir haben bereits erwähnt, daß sich die durch Kurve 1 bzw. 2 von Abbildung 4 angedeutete „Normalverteilung“ der  $h$ -Werte in einer sich selbst überwindenden Mannigfaltigkeit von Fadenmolekülen dauernd erhält, d. h. daß zwar die einzelnen Molekülindividuen ihre  $h$ -Werte ändern, jedoch in solcher Weise, daß sich die Normalverteilung immer wieder selbst reproduziert. Die letztere Eigenschaft der Normalverteilung hat zur Folge, daß eine von Kurve 2 der Abb. 4 abweichende Verteilung, etwa die Verteilung Kurve 3 der Abb. 4, d. h. eine Verteilung, bei welcher wir allen Molekülen nahezu denselben relativ großen Wert von  $h$  beilegen, von selbst, durch Wärmebewegung, in die Normalverteilung Kurve 2 von Abb. 4 übergehen würde. Letzteres wiederum bedeutet, daß wir eine der Kurve 3 von Abb. 4 entsprechende Verteilung nur mit statistischen Mitteln, welche die Rückkehr von Kurve 3 zu Kurve 2 unmöglich machen, aufrecht erhalten können, oder gröber gesagt: wir müssen, um die Zusammenziehung eines Molekülfadens, dessen Enden sich in einem Abstande  $h$  voneinander befinden (Abb. 5), zu verhindern, Kräfte auf die Fadenenden wirken lassen, und zwar auf das Fadenende 2 der Abb. 5 eine in der positiven, auf das Fadenende 1 eine in der negativen  $x$ -Richtung wirkende Kraft  $\mathfrak{R}$ .

Um diese Kraft zu erhalten, erinnern wir daran, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Faden-

enden eines einzelnen aus  $N_m$  statistischen Fadenelementen der Länge  $A_m$  aufgebauten Molekülfadens einen Abstand besitzen, dessen Betrag zwischen  $h$  und  $h + dh$  liegt, durch die Beziehung (5) bzw. (6) gegeben ist. Da die Entropie eines bestimmten Zustandes eines Systems nach dem Prinzip von BOLTZMANN gleich der Boltzmannschen Konstante, multipliziert mit dem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit des betrachteten Zustandes ist, können wir offenbar dem einzelnen Faden auf Grund von (5) bzw. (6) eine vom Abstand der Fadenenden abhängige Entropie zuordnen. In bekannter Weise gehen wir von der Entropie (durch Multiplikation mit der absoluten Temperatur) zur freien Energie über, wobei wir noch bemerken, daß die Gesamtenergie eines aus statistischen Fadenelementen gebildeten Fadens von  $h$  unabhängig ist. Ist dann die freie Energie des Fadens als Funktion von  $h$  bekannt, so erhalten wir durch Differenzieren nach  $h$  die Kraft, welche benötigt wird, um die Fadenenden im Abstande  $h$  voneinander festzuhalten. Die Kraft  $\mathfrak{R}$  wird, solange  $h$

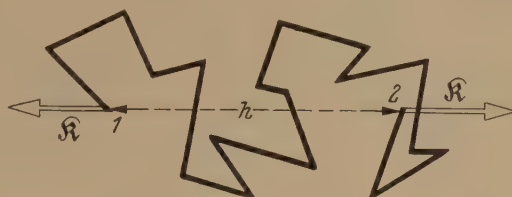


Abb. 5. Um die Kontraktion eines Molekülfadens, dessen Enden sich in einem Abstande  $h$  voneinander befinden, zu verhindern, müssen auf die Fadenenden in Richtung des Vektors  $h$  entgegengesetzt gleiche Kräfte ( $\mathfrak{R}$ ) wirken.

viel kleiner ist als die Länge des gestreckten Fadens, d. h. solange die Näherung (5) für die Verteilungsfunktion gilt, gleich [9]

$$\mathfrak{R} = 3 k T \frac{h}{N_m A_m^2} \quad (9)$$

(gültig für  $h/N_m A_m \leq 0,3$ ).

Hierbei ist  $k$  die BOLTZMANNsche Konstante und  $T$  die absolute Temperatur.

Für größere Werte von  $h$  ist die Entropie unter Benützung der Verteilungsfunktion (6) bzw. der im Anhang angegebenen Beziehungen (A1, 2, bis A 1,6) zu berechnen. Für den Fall nahezu gestreckter Fäden ergibt sich anstelle von (9) die, ebenfalls einfache und praktisch genommen für  $\frac{h}{N_m A_m} > 0,5$  brauchbare

Beziehung

$$\mathfrak{R} = \frac{k T}{A_m} \frac{1}{1 - \frac{h}{N_m A_m}} \quad (10)$$

(gültig für  $\frac{h}{N_m A_m} > 0,5$ )

Man ersieht aus dieser Beziehung besonders gut, wie bei Zugrundelegung der genaueren Verteilungsfunktion die Rückstellkraft für den gestreckten Faden unendlich groß wird, indem der Nenner von (10) für  $h = N_m A_m$  verschwindet. Das entspricht der Forderung, daß es unmöglich sein muß, den Abstand der Fadenenden über  $h = L$  hinaus zu vergrößern. Bei Benützung der Näherung (9) würde diese Forderung nicht erfüllt sein. Das tut die Notwendigkeit dar, die genauere Verteilungsfunktion (6) in bestimmten Fällen zu benützen. Der Verlauf der Rückstellkraft  $\mathfrak{R}$  in Abhängigkeit von



$\frac{h}{N_m A_m}$  ist in Abb. 6 im gesamten Bereich (von  $\frac{h}{N_m A_m} = 0$  bis 1) wiedergegeben.

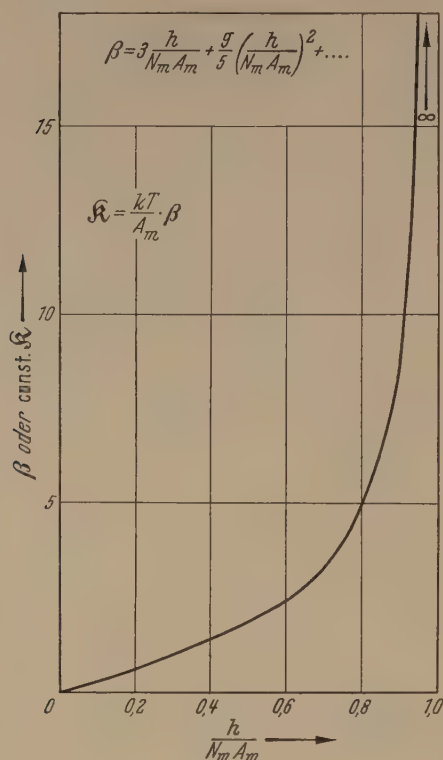


Abb. 6. Abhängigkeit der Rückstellkraft  $R$  (Ordinate) in Abhängigkeit von  $h/N_m A_m$ . Es ist  $h$  der Abstand der Fadenenden,  $N_m A_m = L$  der Abstand, den die Enden im völlig gestreckten Faden besitzen würden.

Interessante weitere Betrachtungen ergeben sich aus dem Umstande, daß wir den einzelnen Fadenmolekülen einerseits eine vom Abstände der Fadenenden abhängige Wahrscheinlichkeit und eine *eigene* Entropie zuschreiben können, daß aber das in Lösung be-



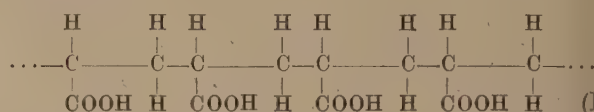
Abb. 7. Molekül von Na-Polyacrylat in sehr verdünnter Lösung. Die bei der elektrolytischen Dissoziation entstehenden Na-Ionen befinden sich durchschnittlich in großem Abstände vom Fadenmolekül und damit in großem Abstände von den auf dem Faden gebundenen, die Na-Ionen neutralisierenden, COO-Gruppen.

findliche Fadenmolekül andererseits ein winziger Teil einer aus sehr vielen ähnlichen Individuen bestehenden Gesamtheit ist; doch sei für solche Betrachtungen, beispielsweise für den Hinweis darauf, daß die Entropie der Gesamtheit nicht gleich der Summe der Entropien der einzelnen an der Gesamtheit teilnehmenden Fadenmoleküle ist, auf die Literatur [10] verwiesen, ebenso

für die damit zusammenhängende Tatsache, daß in der Normalverteilung Abb. 4, Kurve 1 und 2 infolge des Temperatureinflusses auch solche  $h$ -Werte, welche  $W$  nicht zu einem Maximum machen, mit erheblicher Häufigkeit vorkommen.

##### 5. Einfluß elektrischer Ladungen auf die Gestalt von Molekülfäden in hochverdünnter Lösung.

Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß bei einem elektrisch nicht geladenen Faden alle durch verschiedene Orientierung der statistischen Fadenelemente auseinander hervorgehenden Molekülgestalten energetisch gleichwertig sind. Die *Energiegleichheit geht verloren*, wenn elektrische Ladungen auf dem in Lösung befindlichen Faden angebracht werden. Um einen konkreten Fall vor Augen zu haben, betrachten wir etwa den Fall von Polyacrylsäure (Formel II) in wässriger Lösung



Wir setzen der Lösung soviel Alkali, z. B. NaOH zu, daß der Bruchteil  $\alpha$  der vorhandenen COOH-Gruppen in die bekanntlich elektrolytisch dissoziierenden COONa-Gruppen umgewandelt wird. Ist dabei die Lösung *sehr* verdünnt, so werden sich praktisch genommen alle bei der elektrolytischen Dissoziation entstehenden Na-Ionen in weiter Entfernung von den auf dem Faden chemisch gebundenen COO-Gruppen befinden (Abb. 7). Wir haben also ein System von auf dem Faden festen Ladungen vor uns, welches erst in großer Entfernung vom Faden durch Gegenladungen elektrostatisch neutralisiert wird. Die auf dem Faden befindlichen (negativen) Ladungen werden sich in bekannter Weise *gegenseitig abstoßen* und es ist einzusehen, daß auf Grund dieser Abstoßung eine teilweise oder völlige Entknäuelung des Fadens, d. h. eine Erhöhung des Abstandes  $h$  der Fadenenden stattfinden muß. Da sich auf dem Faden vom Polymerisationsgrad  $Z$  bei einem Ionisationsgrad  $\alpha$  insgesamt  $\alpha Z$  Ladungen befinden, so könnten wir, wenn  $e$  die elektrische Elementarladung bezeichnet, für eine rohe Abschätzung annehmen, daß sich je eine Ladung von

Betrage  $\frac{e \alpha \cdot Z}{2}$  auf dem Fadenanfangspunkt und auf dem Endpunkt befindet (auf den Punkten 1 und 2 von Abb. 5), und wir könnten die COULOMBSche Kraft angeben, mit welcher sich diese Ladungen abstoßen. Jetzt liegt offenbar der Fall vor, daß auf die Endpunkte 1 und 2 von Abb. 5 eine Kraft mit Tendenz zur Vergrößerung des Abstandes  $h$  wirkt, eine Kraft, wie wir sie benötigt hatten, um beispielsweise eine Verteilung gemäß Kurve 3 von Abb. 4 künstlich zu erzeugen. Wir dürfen somit erwarten, unter Wirkung der auf dem Faden festen, sich abstoßenden Ladungen eine der Kurve 3 von Abb. 4 entsprechende Verteilung tatsächlich zu erhalten. Indem wir die COULOMBSche Kraft gleich der Kraft setzen, welche gemäß Gl. (10) erforderlich ist, um eine Kontraktion des Fadens, dessen Enden sich in einem Abstände  $h$  voneinander befinden, zu verhindern, können wir das bei jedem Ionisationsgrade zu erwartende Ausmaß der Entknäuelung abschätzen.



Eine bessere und einwandfreie Bestimmung der elektrostatische Aufladung bewirkten Entladung [11], [12], [13], [14], [15], welche aber im qualitativen auf das eben Gesagte hinausläuft, ergeben wir daraus, daß dem auf dem Ionisationsgrad  $\alpha$  der Lösung befindlichen Faden eine vom Abstande  $h$  der Fadenenden abhängige, genau angebbare Energie zukommt: Auf jedem statistischen Fadenelement finden sich ja  $s_m \cdot \alpha$  Elementarladungen. Ist  $r_{ik}$  der Abstand des  $i$ ten vom  $k$ ten statistischen Fadenelement der Kette, so ist  $s^2 s_m^2 \alpha^2$  geteilt durch  $r_{ik}^2$  und multipliziert durch die Dielektrizitätskonstante  $D$  der Lösung ergibt die Energie der elektrostatischen Wechselwirkung zwischen den auf dem  $i$ ten und  $k$ ten statistischen Fadenelement befindlichen Ladungen zur elektrischen Energie  $U$  des Fadens. Die Gesamtenergie  $U$  ergibt sich mit durch Summation über  $i$  und  $k$  zu

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k; i \neq k} \frac{(e s_m \alpha)^2}{D r_{ik}^2} \quad (11)$$

Wir haben wir im Anschluß an die Besprechung der Verteilungsfunktion schon bemerkt, daß wir bei einem Faden, dessen Enden in einem Abstande  $h$  voneinander festgehalten werden, auf Grund statistischer Betrachtungen u. a. den mittleren reziproken Abstand  $1/r_{ik}$  um  $j$  Einheiten auseinander liegender statistischer Fadenelemente, also  $(1/r_{i,j+i})$  angeben können.

Mittelwerte der in (11) vorkommenden reziproken Abstände hängen also in angebbarer Weise vom Abstande  $h$  zwischen den Fadenenden ab. Damit ist die Größe  $U$  in (11) eine angebbare Funktion des Ionisationsgrades  $\alpha$  und des Abstandes  $h$  zwischen den Fadenenden:

Die Verteilungsfunktion  $W(h)$  für den in der Lösung befindlichen, auf dem Ionisationsgrade  $\alpha$  befindlichen Faden erhalten wir jetzt, indem wir bedenken, daß die Wahrscheinlichkeit in dem Falle, daß alle Zustände energetisch gleich sind, durch die Beziehung bzw. (6) gegeben sind, und 2. daß nach dem MAXWELL-BOLTZMANNschen Prinzip die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes, welchem die Energie  $U$  zukommt,

ist  $e^{-U/kT}$  mal der Wahrscheinlichkeit, welche demselben Zustande bei Vernachlässigung des Energieinflusses (z. B. bei unendlich hoher Temperatur) zugehört. Durch Kombination der Beziehung (6) mit (11) erhalten wir also für den geladenen Faden in sehr verdünnter Lösung beim Ionisationsgrade  $\alpha$ :

$$W(h) = \text{const } e^{-\left(\frac{3 h^2}{2 N_m A_m^2} + \dots\right)} e^{-\frac{U(h, \alpha)}{kT}} h^2 dh. \quad (12)$$

Wir ist  $U$  als Funktion von  $h$  und  $\alpha$  aus Gl. (11), welcher ja die  $r_{ik}$  von  $h$  abhängen, einzusetzen. Die angebbaren Näherungen für  $U(h)$  sind im Anhang (A 3,1) u. A (3,2) angegeben. Die Verteilungsfunktion  $W(h)$ , die man im Falle einer Polyacrylsäure vom Polymerisationsgrade  $Z = 400$ , unter Zuhilfenahme eines Wertes  $A_m = 10^{-7}$  cm für die mittlere Lösung bei Zimmertemperatur bei verschiedenen Ionisationsgraden  $\alpha$  erhält, ist in Abb. 8 wieder gegeben. Aus diesen Kurven ersieht man, wie ein Ionisationsgrad  $\alpha = 0,06$  [d. i. 6%] bereits eine wesentliche Entknäuelung zur Folge hat und daß der Abstand der Fadenenden bei einem Ionisationsgrade von 0,20 bereits etwa 70% und bei einem Ionisationsgrade von 0,625 sogar 95% des maximal möglichen Ab-

standes  $L$  beträgt. Für formelmäßige Näherungen sei auf die Gleichungen (A 4,1) u. (A 4,2) im Anhang verwiesen. Die tatsächlichen Verhältnisse werden in quantitativer Hinsicht dadurch etwas kompliziert, daß das elektrisch nicht geladene Knäuel der Polyacrylsäure etwas in sich assoziiert ist<sup>1</sup>.

Als Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen stellen wir fest, daß die nicht ionisierten Moleküle von Polyacrylsäure, wie sie etwa in einer schwach mineral-sauren wässrigen Lösung bei Zimmertemperatur vorliegen, die statistische Gestalt (ungefähr entsprechend Abb. 1 oder 3c) besitzen werden und daß eine praktisch völlige Streckung der Molekülfäden erwartet werden muß, wenn wir, immer in sehr verdünnter Lö-

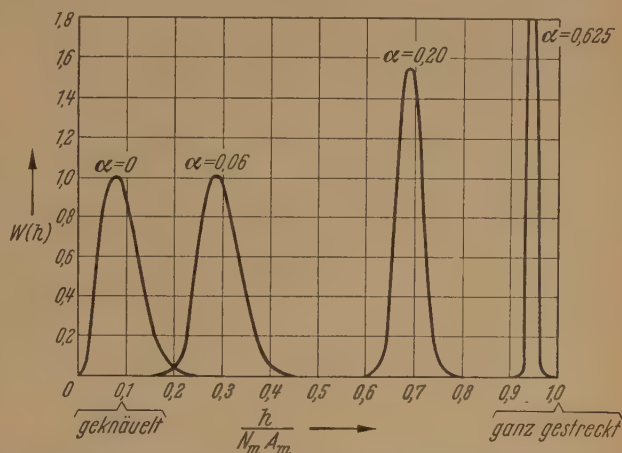


Abb. 8. Verteilungsfunktion (berechnet) für Polyacrylsäure vom Polymerisationsgrade  $Z = 400$ ;  $N_m = 100$ ;  $A_m = 10^{-7}$  cm in Wasser.  $W(h)$  als Ordinate gegen  $h/N_m A_m$  als Abszisse für verschiedene Ionisationsgrade des Molekülfadens.

sung, die Säure durch Zusatz einer geeigneten Menge von Alkali teilweise ins Alkalisalz verwandeln. Den Beweis dafür, daß diese Erwartung tatsächlich erfüllt wird, können wir beispielsweise aus Beobachtungen der Viskosität sowie der Strömungsdoppelbrechung solcher Lösungen entnehmen.

## 6. Auswirkung der Entknäuelung auf die Viskosität und die Strömungsdoppelbrechung von Fadenmoleküllösungen.

### a) Viskositätszahl.

Als Maß für die durch die Anwesenheit von Fremdschubstanz in einer Lösung bedingte Viskositäts-erhöhung benützt man in der Regel die sogenannte Viskositätszahl  $[\eta]$ . Sie ist definiert als

$$[\eta] = \left[ \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0 c} \right], \quad \lim_{c \rightarrow 0} \frac{c}{q - 0} \quad (13)$$

wobei  $\eta$  die Viskosität der Lösung,  $\eta_0$  die des Lösungsmittels und  $c$  die Konzentration an Fremdschubstanz (beispielsweise in Grundmol pro Liter) bedeutet.  $[\eta]$  ist also die relative, durch ein Grundmol pro Liter hervor-gebrachte Erhöhung der Viskosität. Sie ist bei geknäu-elten oder entknäuelten Fadenmolekülen in roher Nähe-rung proportional dem Quadrate des Abstandes  $h$  der Fadenenden [2], [17].

Wenn man bei einer Lösung, welche zunächst prak-tisch undissoziierte Polyacrylsäure enthält, durch fort-schreitenden Zusatz von Alkali den Ionisationsgrad

<sup>1</sup> Nach Beobachtungen von A. KATCHALSKY; näheres hierüber s. [16].



und damit nach Abb. 8 den mittleren Abstand der Fadenenden erhöht, so beobachtet man dementsprechend einen außerordentlich starken Anstieg der Viskositätszahl der Lösung. Die durch Alkali bewirkte Zunahme der Viskositätszahl kann, je nach dem Polymerisationsgrade, einen Faktor 100 oder 1000 oder noch mehr betragen.

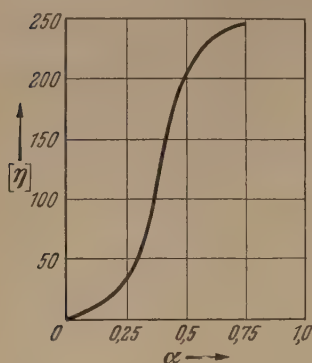


Abb. 9. Polymethacrylsäure in großer Verdünnung in Wasser.  $[\eta]$  als Ordinate gegen den Ionisationsgrad  $\alpha$  als Abszisse.

Von besonderem Interesse ist es dabei, die Abhängigkeit der Viskositätszahl vom Polymerisationsgrade bei geknäuelten Fäden einerseits, bei praktisch genommen gestreckten Fäden andererseits zu vergleichen: Da bei *statistisch geknäuelten* Fadenmolekülen das mittlere Abstandsquadrat  $\bar{h}^2$  nach Gl. (7) proportional  $N_m$  und damit proportional dem Polymerisationsgrade  $Z$  anwächst und da  $[\eta]$  wie gesagt ebenfalls etwa proportional  $\bar{h}^2$  ist, können wir erwarten, daß  $[\eta]$  beim Vergleich statistisch gestalteter Fadenmoleküle proportional mit dem Polymerisationsgrade zunimmt. Das ist ein Verhalten, welches einer von STAUDINGER [18] bei elektrisch nicht geladenen Molekülen gefundenen empirischen Gesetzmäßigkeit entspricht. Falls auf der anderen Seite die Moleküle etwa von Polyacrylsäure durch den Übergang in den ionisierten Zustand beispielsweise bei  $\alpha = 0,6$  völlig gestreckt werden, so ist in diesem Gebiet der Abstand der Fadenenden proportional dem Polymerisationsgrade  $Z$  und damit  $\bar{h}^2$  und auch die Viskositätszahl  $[\eta]$  proportional mit  $Z^2$ . Die Abhängigkeit der Viskositätszahl vom Polymerisationsgrade muß sich also bei der sauren, elektrolytisch nicht dissoziierten Lösung als eine Proportionalität mit  $Z$ , bei der neutralen, elektrolytisch dissoziierten Lösung als eine Proportionalität mit  $Z^2$  erweisen. Die Proportionalität von  $[\eta]$  mit  $Z$  muß durch den Alkalizusatz in eine Proportionalität mit  $Z^2$  verwandelt werden. Daß dies tatsächlich zutrifft, geht aus Tab. 2 hervor. Es sind hier die Viskositätszahlen von 3 im Polymerisationsgrade verschiedenen Polyacrylsäuren in Abhängigkeit vom Ionisationsgrade  $\alpha$  zu-

sammengestellt. Man sieht, wie die beobachteten Viskositätszahlen im sauren Gebiet (d. h. für die elektrolytisch nicht dissoziierten Verbindungen; Kolonne der Tab. 2.) proportional dem Polymerisationsgrade bei den ionisierten Verbindungen dagegen (letzte Kolonne der Tab. 2) proportional dem Quadrat des Polymerisationsgrades sind.

Es sei im übrigen bemerkt, daß die durch Alkali bewirkte teilweise oder völlige Entknäuelung der Polyacrylsäuremoleküle durch Zusatz von Säure zur Lösung rückgängig gemacht werden kann; wenn die elektrolytische Dissoziation des Na-Salzes durch Säurezusatz beseitigt wird, indem durch den Säurezusatz aus der elektrolytisch dissoziierenden Na-Salz die elektrolytisch nicht dissoziierende Säure hergestellt wird, verschwindet mit der elektrolytischen Dissoziation die elektrische Aufladung des Fadens und damit die Kraft, welche eine Streckung des Molekülfadens veranlaßt hatte. Bei Säurezusatz zum Na-Salz der Polyacrylsäure kehrt daher das entknäuelte Molekül (Verteilung gemäß Kurve 3 von Abb. 4) in die statistische Gestalt (Verteilung gemäß Kurve 2 von Abb. 4) zurück, was sich durch eine Abnahme der Viskositätszahl zu erkennen gibt. Durch nachfolgenden Zusatz von Laug kann der geladene, gestreckte, einer hohen Viskositätszahl entsprechende Zustand wieder hergestellt werden usw. D. h. es ist möglich, Moleküle durch Beeinflussung des Ionisationszustandes (Säure- und Laugzusatz) abwechselnd zur Dilatation und Kontraktion zu bringen und diesen Vorgang durch Beobachtung der Viskositätszahl beliebig oft zu verfolgen.

#### b) Orientierung der Strömungsdoppelbrechung.

Die aus der Viskositätszahl zu ziehenden Folgerungen lassen sich durch Beobachtung der Orientierung der Strömungsdoppelbrechung ergänzen und bestätigen. Die an einer Lösung geometrisch anisotropen Teilchen zu beobachtende Strömungsdoppelbrechung ist bei schwachem Strömungsgefälle stets in der Strömungsebene unter  $45^\circ$  zur Strömungsrichtung orientiert und diese Orientierung geht bei steigendem Strömungsgefälle allmählich in eine Orientierung parallel zur Strömungsrichtung über [19], [20]. Bezeichnen wir den Winkel, den die Orientierung der Strömungsdoppelbrechung bei einem bestimmten Strömungsgefälle  $q$  mit der  $45^\circ$ -Richtung einschließt, mit  $\omega$  und  $\eta_0$  die Viskosität des Lösungsmittels, so kann man durch hydrodynamische Betrachtungen zeigen, daß der Quotient

$$\left( \frac{\omega}{\eta_0 q} \right)_{\text{limes } q=0} = [\omega], \quad (1)$$

den wir als *Orientierungszahl* bezeichnen, ungefähr pro

Tabelle 2. Abhängigkeit der Viskositätszahl  $\frac{\eta_{sp}}{c} = [\eta]$  vom Polymerisationsgrade für verschiedene Werte des Ionisationsgrades  $\alpha$ .

Präparat von Polymethacrylsäure	Polymerisationsgrad $Z$	$\alpha = 0,016$	$\alpha = 0,040$	$\alpha = 0,15$	$\alpha = 0,43$	$\alpha = 0,76$
I	1100	$[\eta] = 15,82$	28,65	265	825	838
II	600	8,5	11,75	104	302	302
III	150	2,1	2,36	5,87	16,8	16,4
Verhältnis $[\eta]_I : [\eta]_{II} : [\eta]_{III}$		7,5:4:1	11,6:4,7:1	45:18:1	49:18:1	51:18:1

Zum Vergleich:  $Z_I : Z_{II} : Z_{III} = 7,5 : 4 : 1$

$Z_I^2 : Z_{II}^2 : Z_{III}^2 = 56 : 16 : 1$



onal  $Z \cdot \bar{h}^2$  ansteigen muß [2]. Da  $\bar{h}^2$  stark zu-  
t, wenn ein statistisch gestaltetes Fadenmolekül  
eckt wird, ergibt sich eine entsprechende Zunahme  
Orientierungszahl  $[\omega]$ , wenn wir von einer sauren  
ner neutralen hochverdünnten Lösung von Poly-  
säure (bzw. deren Na-Salz) übergehen. Die zu-  
rtende Zunahme der Orientierungszahl, beispiels-  
um einen Faktor 100, konnte tatsächlich beob-  
et werden [11].

#### 7. Höhere Konzentration und Salzeinfluß.

ie gemäß Abb. 7 gemachte Voraussetzung, daß  
die Gegenionen, welche die auf dem Faden be-  
findlichen Ladungen neutralisieren, in weiter Entfer-  
vom Fadenmolekül befinden, ist, wie wir her-  
eben, *nur in hochverdünnter salzfreier Lösung* er-  
Gehen wir zu höheren Konzentrationen über,  
enthält die Lösung neben Polyacrylat, Natrium-  
id oder ein anderes Neutralsalz, so wird sich ein  
ntlicher Teil der Gegenionen innerhalb des vom  
molekül gebildeten Knäuels befinden (Abb. 10).  
it einzusehen, daß dann ein Teil der Abstoßung,  
e die auf dem Faden befindlichen negativen La-  
gen aufeinander ausüben, durch die innerhalb des  
uels befindlichen Gegenionen *abgeschirmt* wird.  
lehem Falle ist die auf die Fadenenden im Sinne  
Entknäuelung wirkende Kraft *schwächer* und die  
ekung des Fadens weniger ausgeprägt. Schon die  
ge Neutralisation der Polyacrylsäure mit NaOH  
die Anwendung größerer Konzentrationen der  
säure hat zur Folge, daß die Streckung der Fäden  
llständig wird. Unzweideutig ist dies daran zu  
ennen, daß jetzt die Viskositätszahl kleiner wird  
n Falle der hochverdünnten Lösung. Siehe hierzu  
Kurven 2 bis 6 von Abb. 11a. In ähnlicher Weise  
eine Erhöhung der Konzentration an Polyacrylat  
t ein Zusatz von Neutralsalz bei konstant gehal-  
r Konzentration von Polyacrylsäure (Abb. 11b).  
Eine befriedigende quantitative Behandlung ist  
in diesem Falle möglich [12]. Man berücksichtigt,  
das Potential in einer Elektrolytlösung im Ab-  
de  $r_{ik}$  von einer Ladung  $\varepsilon$  nicht gleich  $\frac{\varepsilon}{D \cdot r_{ik}}$ ,  
ern gleich  $\frac{\varepsilon}{D r_{ik}} e^{-\kappa r_{ik}}$  ist, wenn  $1/\kappa$  den nach  
Elektrolyt-Theorie von DEBYE und HÜCKEL für  
Elektrolytlösung charakteristischen Abstand be-  
et. Die Summanden in (11) sind also mit  $e^{-\kappa \cdot r_{ik}}$   
multiplizieren. Durch eine sorgfältige, von O.  
ZLE durchgeführte Betrachtung ist gezeigt wor-  
[12], daß die bei endlicher Konzentration der  
säure und die bei endlicher Konzentration der  
ng an Neutralsalz auftretende Verringerung der  
knäuelung durch eine solche Betrachtung an-  
ernd quantitativ erfaßt werden kann.

Einfluß elektrischer Ladungen auf die Quellung eines  
Fadenmoleküls gebildeten räumlichen Netzwerkes.  
Betrachten wir anstatt einzelner in Lösung befind-  
er Fadenmoleküle ein aus Fadenmolekülen gebil-  
tes räumliches Netzwerk und fragen wir auch hier  
dem Einfluß elektrischer Ladungen, welche dann  
Netzwerk zufolge elektrolytischer Dissoziation salz-  
er am Molekülgerüst vorhandener Gruppen erteilt  
len, so ist einzusehen, daß wir hier dem Fall einer  
iv konzentrierten Lösung näherstehen als dem  
r unendlich verdünnten Polyacrylatlösung.

Betrachten wir als Beispiel ein in Wasser mehr oder  
weniger gequollenes Netzwerk, dessen Netzbogen (be-  
nachbarte Verknüpfungspunkte des Netzes verbind-  
ende Fadenstücke) durch *Polyacrylsäure* gebildet  
werden, und denken wir uns die in dem System vor-



Abb. 10. Molekül von Na-Polyacrylat in Neutralsalzlösung. Die Ionen-  
konzentration in der das Polyacrylat umgebenden Lösung ist jetzt so  
groß, daß ein wesentlicher Teil der elektrischen Neutralisation der auf dem  
Faden befindlichen Ladungen innerhalb des vom Faden gebildeten Knäuels  
erfolgt. (Gegensatz zum Falle von Abb. 7.)

handene Polyacrylsäure teilweise mit Alkali neutrali-  
siert. Wir werden tatsächlich feststellen, daß die auf  
einem hervorgehobenen Netzbogen vorhandenen elek-  
trischen Ladungen, nicht nur durch die Alkaliionen  
neutralisiert bzw. elektrisch beeinflusst werden, welche  
durch elektrolytische Dissoziation vom hervorgehobe-  
nen Netzbogen abgespalten wurden, sondern auch

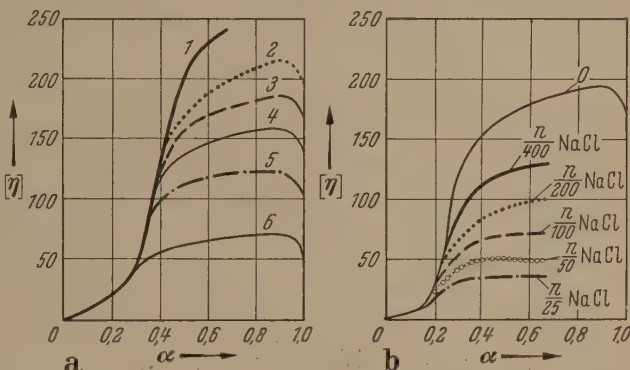


Abb. 11a. Einfluß höherer Konzentrationen auf die Viskosität von Poly-  
methacrylatlösungen in Wasser<sup>1</sup>. Als Ordinate ist die Viskositätszahl  $[\eta]$ , als Abszisse der Dissoziationsgrad  $\alpha$  aufgetragen. Jede Kurve entspricht  
einer bestimmten Konzentration in Grundmol pro Liter. Die Konzen-  
tration der Polymethacrylsäure betrug

bei Kurve 1	1/800 Grundmol pro Liter, d. i. 0,012%
2	1/400 „ „ „ 0,024%
3	1/200 „ „ „ 0,049%
4	1/100 „ „ „ 0,098%
5	1/50 „ „ „ 0,196%
6	1/12,5 „ „ „ 0,785%

Die Abweichung der einzelnen Kurven von der bei *sehr* großer Verdünnung  
beobachteten Kurve 1 macht sich um so früher, d. h. bei um so kleinerem  
Ionisationsgrade bemerkbar, je größer die Polymethacrylatkonzentration  
gewählt ist.

Abb. 11b. Einfluß von Neutralsalz auf die Viskosität von Polymethacrylat-  
lösungen in Wasser<sup>1</sup>. Als Ordinate ist die Viskositätszahl  $[\eta]$ , als Abszisse  
der Dissoziationsgrad  $\alpha$  aufgetragen. Die Konzentration an Polymethacry-  
lat ist in allen Fällen 1/50 Grundmol pro Liter, d. i. etwa 0,2 g Polymeth-  
acrylsäure in 100 cm Lösung. Dagegen entspricht jede Kurve einer an-  
dern, bestimmten Konzentration an Neutralsalz. Die letztere betrug der  
Reihe nach: 0; 1/400; 1/200; 1/100; 1/50 und 1/25 Mol NaCl pro Liter.  
Bemerkung: Die den Kurven 11a und 11b entsprechenden Polymeri-  
sationsgrade waren nicht genau identisch.

<sup>1</sup> Nach A. KATCHALSKY und H. EISENBERG, entnommen aus [12].

durch die Alkaliionen, welche von benachbarten Netz-  
bogen stammen. Außerdem werden wir feststellen,  
daß die Entfernung einer COO-Gruppe des hervorge-  
hobenen Netzbogens von der nächsten oder übernäch-  
sten zum *selben* Netzbogen gehörenden COO-Gruppe



von derselben Größenordnung sein kann wie ihre Entfernung von einer benachbarten, an einem *fremden* Netzbogen befindlichen COO-Gruppe. In solchem Falle wird beim ionisierten Gel die gegenseitige elektrostatische Abstoßung der auf dem Netzbogen befindlichen Ladungen erheblich kleiner sein als es bei einer hochverdünnten Lösung einzelner Molekülfäden der Fall war. Vergleiche hierzu den Unterschied von Abb. 9 gegenüber Abb. 11a, b. Indessen zeigt es sich, daß auch in diesem Falle beim Übergang vom nicht-ionisierten zum ionisierten Zustande eine *praktisch völlige Streckung der Netzbogen* eintritt und man überlegt sich, daß diese Streckung im wesentlichen durch das Verdünnungsbestreben der im Gel vorhandenen beweglichen Ionen, z. B. Na-Ionen, im Falle eines Na-Polyacrylatgels, verursacht wird.

Betrachten wir, um dies genauer zu begründen, ein Gel, dessen Netzbogen aus Polyacrylsäure bestehen und welches mit reinem Wasser in Berührung steht. Wir fügen dem Außenmedium soviel Natriumhydroxyd zu, daß der Bruchteil  $\alpha$  der im Gel vorhandenen Säuregruppen neutralisiert werden kann; wir werden feststellen, daß sofort das gesamte NaOH durch das Gel absorbiert wird. Der Bruchteil  $\alpha$  der im Gel enthaltenen COOH-Gruppen wird dadurch in elektrolytisch dissoziierende COONa-Gruppen übergeführt. Im Gegensatz zum vorher betrachteten Falle eines einzelnen in sehr verdünnter Lösung befindlichen Molekülfadens werden die bei der Dissoziation entstehenden  $\text{Na}^+$ -Ionen im Gel verbleiben, da sie durch elektrostatische Kräfte darin zurückgehalten werden. Die Tendenz der  $\text{Na}^+$ -Ionen, ins Außenmedium überzutreten, erzeugt ein an der Geloberfläche sich einstellendes Potential (Membranpotential), dessen Größe in Abhängigkeit von den (innerhalb und außerhalb des Gels) vorhandenen Ionenkonzentrationen bekanntlich von DONNAN [21] untersucht und beschrieben worden ist. Bei einem makroskopischen Gel spielt dieses Potential für das Ausmaß der am Gel zu beobachtenden Quellung keine Rolle, wohl aber für den Übertritt von  $\text{Na}^+$ -Ionen und andern diffusiblen Ionen aus dem Gel ins Außenmedium und zwar, wie oben angedeutet und wie ebenfalls von DONNAN untersucht wurde, in dem Sinne, daß im vorliegenden Falle die  *$\text{Na}^+$ -Ionen praktisch vollständig im Gel zurückgehalten werden*. Zwischen einem in äußerst verdünnter Lösung befindlichen Einzelfaden und einem Gelteilchen besteht hiernach ein wesentlicher Unterschied, indem sich praktisch genommen alle den Einzelfaden neutralisierenden Ionen in großer Entfernung vom Faden befinden oder befinden können, während beim Gelteilchen praktisch alle neutralisierenden Ionen im Gelteilchen verbleiben. Selbstverständlich muß es hier einen stetigen Übergang geben, auf den wir noch kurz eingehen werden.

Da nun bei einem makroskopischen Gelteilchen die sämtlichen zum Ionisationsgrade  $\alpha$  gehörenden Alkaliionen im Gel verbleiben müssen, so erkennt man, daß mit einer Lösungsmittelaufnahme des Gels eine *Verdünnung der im Gel befindlichen Ionenlösung* und damit eine Entropievermehrung des Systems, gleichzeitig aber auch eine erhöhte Quellung des Gels, eine *Streckung der Netzbogen* verbunden ist. Der Streckung der Netzbogen, d. h. der Vergrößerung des den einzelnen Netzbogen zuzuordnenden  $h$ -Wertes entspricht eine Entropieverminderung, was man nach dem Vorigen auch dadurch zum Ausdruck bringen kann, daß jeder

Netzbogen, dessen Endpunkte im Abstände  $h$  einander gehalten werden, der Dehnung bzw. Quellung eine Kraft  $\mathfrak{R}$  (Gl. (9) u. (10)) entgegensetzt. Die Erhöhung des Ionisationsgrades des Gels muß in diesen Betrachtungen eine erhöhte Quellung des Gels zur Folge haben [21], [22], [23], wobei die die zusätzliche Quellung hervorbringende Kraft in roher Näherung proportional der Konzentration der im Gel enthaltenen beweglichen Ionen und damit in roher Näherung proportional dem Ionisationsgrade  $\alpha$  ist. Die gesamte Betrachtung kann nicht nur für den Fall entwickelt werden, daß das an das Gel grenzende Einbettungsmedium reines Lösungsmittel ist, sondern auch für den Fall, daß das Außenmedium zusätzliche Elektrolyten beispielsweise Neutralsalz wie NaCl usw. enthält. Eine genauere Betrachtung [16] zeigt, daß die Gegenwart von Neutralsalz im Außenmedium die bei gegebenem Ionisationsgrade  $\alpha$  zu erwartende DONNAN-osmotische Quellung merklich vermindert, aber lange nicht in dem Ausmaße, in welchem die elektrostatische bewirkte Streckung der Einzelfäden in Lösung gemäß Abb. 11 durch die Fremdsalze herabgesetzt wird. Bei sehr niedrigem und mittlerem Elektrolytgehalt des an das gelrenzenden Einbettungsmedium erhält man zu dieser Betrachtung schon bei mäßig starkem Ionisationsgrade  $\alpha$  sehr starke Quellungen, welche an solchen Gelen auch tatsächlich beobachtet werden (Abb. 11) und welche einer praktisch völligen Streckung der Netzbogen entsprechen. Bezeichnen wir den infolge der DONNAN-osmotischen Quellung im Gleichgewicht erreichten Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkten der einzelnen Netzbogen mit  $h_{os}$  (Index  $os$  für „osmotisch“), so ergibt sich für den Grenzfall starker Quellung, etwa für den Fall, daß  $h_{os}$  gleich oder größer als die Hälfte des maximal möglichen Abstandes  $L = N_m A_m$  ist, als Näherung die Beziehung

$$h_{os} = N_m A_m \left[ 1 - \frac{1}{1 + 3\alpha s_m} \right].$$

Wenn  $s_m$  etwa gleich 4 oder 5 oder noch höher angesetzt werden kann, so sieht man, daß durch den DONNAN-osmotischen Effekt schon bei mittlerem Ionisationsgrade  $\alpha$  eine *praktisch vollständige Streckung der Netzbogen erzielt werden kann*. Das ist ein ähnliches Ergebnis, wie es nach Abb. 8 und Gl. (A 4,3) für die Streckung von Einzelfäden infolge der elektrostatischen Abstoßung in sehr verdünnter Lösung erhalten worden ist.

In Abb. 12 ist die Quellung (sie ist proportional mit  $h_{os}$ ) in Abhängigkeit vom Ionisationsgrade  $\alpha$  für einige Gele dargestellt, welche aus Polymethacrylsäure bestehen, deren Fäden mit Hilfe von Divinylbenzol miteinander vernetzt sind. Die Quellung bzw.  $h_{os}$  um so größer, je größer  $N_m$  ist, d. h. je größer die Zahl der zwischen den Vernetzungspunkten liegenden statistischen Fadenelemente ist und damit um so größer, je geringer die Menge des verwendeten Vernetzungsmittels (Divinylbenzol) gewählt wurde. Im übrigen aber bemerkt man, daß  $h_{os}/N_m A_m$  und damit die Quellung, gemessen an der maximal möglichen Quellung gemäß Gl. (15) nur vom Ionisationsgrade  $\alpha$  (und von  $s_m$ ), jedoch *nicht von  $N_m$  abhängt*. Dies heißt, daß der *relative Verlauf der Quellung* in Abhängigkeit von  $\alpha$  bei Gelen derselben Art, welche sich nur durch den Vernetzungsgrad unterscheiden, derselbe sein sollte. Offenbar wird dies durch die Kurven A, B und C der Abb. 12 weitgehend bestätigt.



# Unterschied zwischen DONNAN-osmotischem Effekt und elektrostatischem Effekt.

Als charakteristischen Unterschied zwischen dem osmotischen Effekt (Gl. (15)) und den elektrostatischen Effekten ((Gl. A 4,3)) stellen wir fest, daß der osmotische Effekt eine Proportionalität mit  $\alpha$ , der elektrostatische Effekt eine Proportionalität mit  $\alpha^2$  aufweist. Es gilt dies nicht bei starken Dehnungsgraden, sondern gemäß den oben betrachteten auch bei schwachen Dehnungsgraden, z. B. bei sehr kleinen  $\alpha$ -Werten. Eine Bestätigung hierfür und gleichzeitig eine Bestätigung dafür, daß die durch elektrolytische Dissoziation hervorgerufene Quellung eines Gels im wesentlichen ein DONNAN-osmotischer und kein elektrostatischer Effekt ist, ist in Abb. 12 zu erblicken, daß die durch steigenden Ionisationsgrad hervorgerufene Erhöhung von  $h_{os}$  gemäß Gl. 12 bei kleinen Werten von  $\alpha$  tatsächlich proportional  $\alpha$  verläuft. Das ist daran zu erkennen, daß die Kurven A, B und C von Abb. 12 bei  $\alpha = 0$  mit einem Neigungswinkel in den bei  $\alpha = 0$  geltenden  $h$ -Wert einlaufen. Im Gegensatz hierzu und in Übereinstimmung mit (A 4,1) geht bei hochverdünnten Lösungen von Fadenmolekülen, bei welchen der elektrostatische Effekt die Hauptrolle spielt, der Wert von  $h$  an der Grenze von  $\alpha = 0$  mit horizontaler Tangente ein. Bei  $\alpha = 0$  geltenden  $h$ -Wert über, was beispielsweise aus den Abb. 11a und b mit Deutlichkeit zu entnehmen ist.

Wir haben darauf hingewiesen, daß sich beim Eindringen in hochverdünnte Lösung die Gegenionen, welche die auf dem Faden befindlichen Ladungen neutralisieren, in weiter Entfernung vom Faden befinden, eine mit  $\alpha^2$  proportionale Entknäuelung zur Folge hat, während beim Gelteilchen die neutralisierenden Gegenionen grundsätzlich im Gelteilchen verbleiben und mit  $\alpha$  proportionale Quellung des Gels hervorgerufen. Man wird einwenden, daß ein Fadenmolekül genügend hohem Polymerisationsgrade bereits ein kleines Gelteilchen ist und daß somit ein Faden von hohem Polymerisationsgrade sowohl als Fadenmolekül als auch als Gelteilchen angesprochen werden kann. Der Übergang vom einen zum anderen Zustand liegt offenbar dann vor, wenn die Abmessungen von den Gegenionen gebildeten Ionenatmosphäre in der Lösung von der Größenordnung des Fadenmoleküls ist. Ist  $h$  klein gegen die Abmessungen der Ionenatmosphäre, so ist die elektrostatische Behandlung berechtigt; ist umgekehrt  $h$  groß gegen die Abmessungen der Ionenatmosphäre, so wird die Behandlung des Fadenmoleküls als Gelteilchen anzuspochen sein.

## 10. Beziehungen zur Muskelkontraktion.

Unabhängig davon, wie weit die Änderung des Lösungszustandes durch elektrostatische oder DONNAN-osmotische Betrachtungen zu deuten ist, so steht fest, daß eine Erhöhung des Ionisationsgrades bei Polymeren aus Polyelektrolyten bestehenden räumlichen Netzwerken eine Erhöhung der  $h$ -Werte der Netzbogen zur Folge hat und daß schon bei bescheidenem Ionisationsgrade eine praktisch völlige Streckung der Netzbogen erfolgt. Es steht weiter fest, daß diese Streckung der Netzbogen bei Erniedrigung des Ionisationsgrades rückgängig wird und daß wir die Streckung und Kontraktion des makroskopischen aus einem solchen Netzwerk gebildeten Systems durch chemische Mittel, welche den Ionisationsgrad erhöhen oder vermindern,

beliebig oft wiederholen können [24], [25], [26], [27]. Wir vermuten, daß diese an makroskopischen Netzwerken erzielbaren Effekte zur Muskelkontraktion in Beziehung stehen [28], [16] und zwar auf Grund der folgenden Feststellungen:

1. Es gelingt, aus Polyvinylalkohol und Polyacrylsäure bestehende Fäden herzustellen, welche in Wasser gequollen zu etwa 80% aus Wasser bestehen. Sie dehnen sich bei Zusatz von Alkali und kontrahieren sich bei nachfolgendem Zusatz von Säure; der durch Alkali gedehnte und dann mit einem Gewicht verbundene Faden vermag ein Gewicht von der Unterlage empor-

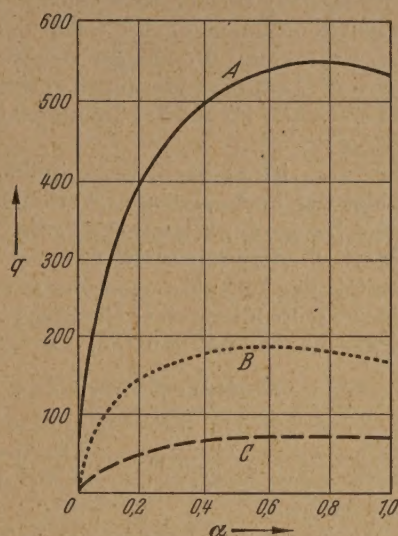


Abb. 12. Quellungsgrad  $q$  von Polymethacrylsäure-Gelen in Wasser in Abhängigkeit vom Ionisationsgrad  $\alpha$  bei 26° C. (Entnommen aus: [26].) Kurve A: Polymethacrylsäure, durch Kopolymerisation mit 1% Divinylbenzol zu einem Netzwerk verbunden. Kurve B: Engeres Netzwerk, hergestellt durch Kopolymerisation der Säure mit 2% Divinylbenzol. Kurve C: Weiter verengtes Netzwerk, hergestellt durch Kopolymerisation der Säure mit 4% Divinylbenzol. Der Quellungsgrad  $q$  ist das Volumen des 1 cm<sup>3</sup> Trockensubstanz enthaltenden Gels.

zuheben, welches gleich ist dem 15 000—70 000 fachen des Gewichts der in einem Faden von 1 cm Länge enthaltenen Polyacrylsäure.

2. Der menschliche oder tierische Muskel vermag im Maximum ebenfalls das 15—60 000 fache des Gewichts der in einer Faser von 1 cm Länge enthaltenen Trockensubstanz von der Unterlage emporzuheben.

3. Wenn man annimmt, daß in der durch Alkali gestreckten künstlichen Faser der Abstand  $h$  zwischen den Enden der Netzbogen im Mittel ungefähr 70 bis 80% von der maximalen Länge ( $N_m A_m$ ) beträgt, so ist bei Benützung von Gl. (10) das Gewicht, welcher theoretisch von der Unterlage gehoben werden kann ungefähr gleich dem 74 000 fachen des Gewichts des in einem cm des Fadens enthaltenen kontraktile Substanz.

4. Die Reißfestigkeit ist beim Muskel und bei der künstlichen in Wasser gequollenen Faser übereinstimmend ungefähr 4—12 kg/cm<sup>2</sup>.

5. Die Arbeitsleistung je Gramm kontraktile Substanz je Kontraktion ist beim Muskel etwa 15—20 mal 10<sup>-2</sup> cal/g, bei der künstlichen Faser ungefähr 7 · 10<sup>-2</sup> cal/g.

6. Für die Herbeiführung des Überganges vom kontrahierten zum dilatierten Zustand und umgekehrt reicht bei der künstlichen Faser eine Änderung des Ionisationszustandes des Gels aus, welche 0,05 g Mol Ion pro Liter des Gels entspricht. Von ähnlicher



Größe sind die Konzentrationen an Substanzen, welche im lebenden Muskel für die Herbeiführung einer Änderung des Ladungszustandes der Proteine in Frage kommen, nämlich beispielsweise die Konzentration an Kalium 0,101 Mol/l; an Na 0,027 Mol/l, an Mg 0,011 Mol/l, an Adenosintriphosphorsäure 0,02 Mol/l.

Die vorstehenden Betrachtungen und Versuche zeigen somit, daß eine durch Änderung des elektrischen Ladungszustandes bewirkte umkehrbare Änderung der Form von Fadenmolekülen in Lösung und der Form von Netzbogen in Gelen möglich ist und verstanden werden kann. Es zeigt sich weiter, daß die dabei auftretenden Effekte zur Muskelkontraktion in naher Beziehung stehen könnten, indem die Größe der in Frage kommenden Kräfte und die Mengen der für die Herbeiführung der Ladungsänderungen erforderlichen Stoffkonzentrationen im Muskel die ungefähr gleiche Größe besitzen.

Von Interesse ist es auch, festzustellen, wie auf diesem Gebiet der hochpolymeren Verbindungen die verschiedenen Zweige der Wissenschaft, wie die mathematische Statistik, die präparative Chemie, die physikalische Chemie der Ionenlösungen und gewisse Teile der Medizin zur Behandlung eines Gesamtproblems zusammenwirken können und müssen.

#### Anhang.

1. Verteilungsfunktion  $W(h)$  für die Häufigkeit  $h$  des Abstandes zwischen Anfangs- und Endpunkt eines aus  $N_m$  statistischen Fadenelementen der Länge  $A_m$  bestehenden Fadens.

In erster Näherung gilt (anstatt der im Text angegebenen Gl. (5)):

$$W(h) dh = \left( \frac{3}{2 N_m A_m^2} \right)^{3/2} \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{3 h^2}{2 N_m A_m^2}} h^2 dh \quad (A 1,1)$$

Für größere Werte von  $h$ , insbesondere für Werte von  $h$ , welche nahe an  $L = N_m A_m$  heranreichen, versagt diese Näherung. An Stelle von (A 1,1) tritt dann

$$W(h) dh = \text{const } e^{-\frac{1}{A_m} \int_0^h \beta(h) dh} h^2 dh \quad (A 1,2)$$

wobei

$$\beta(h) = \mathfrak{L}^* \left( \frac{h}{N_m A_m} \right) = 3 \frac{h}{N_m A_m} + \frac{9}{5} \left( \frac{h}{N_m A_m} \right)^3 + \frac{297}{175} \left( \frac{h}{N_m A_m} \right)^5 + \frac{1539}{875} \left( \frac{h}{N_m A_m} \right)^7 + \dots \quad (A 1,3)$$

die inverse LANGEVINSche Funktion des Argumentes  $\frac{h}{N_m A_m}$  bedeutet.

Für  $\frac{h}{N_m A_m} > 0,5$  kann an Stelle der in (A 1,3) für  $\beta$  angegebenen Reihenentwicklung mit Vorteil die Näherung

$$\beta(h) = \frac{1}{1 - \frac{h}{N_m A_m}} \quad \left[ \text{für } \frac{h}{N_m A_m} > 0,5 \right] \quad (A 1,4)$$

benützt werden.

Auf Grund von (A 1,2) und (A 1,3) kann für  $W(h)$  auch geschrieben werden:

$$W(h) dh = \text{const } e^{-N_m \left[ \ln \frac{\beta}{\mathfrak{L} \ln \beta} + \beta \mathfrak{L}(\beta) \right]} h^2 dh \quad (A 1,5)$$

wobei  $\mathfrak{L}(\beta)$  die LANGEVINSche Funktion des Argumentes  $\beta$  bedeutet; oder, wenn wir eine Reihenentwicklung benützen:

$$W(h) dh = \text{const } e^{-\left[ \frac{3 h^2}{2 N_m A_m^2} + N_m \left\{ \frac{9}{20} \left( \frac{h}{N_m A_m} \right)^5 + \frac{99}{350} \left( \frac{h}{N_m A_m} \right)^7 + \frac{1539}{7000} \left( \frac{h}{N_m A_m} \right)^9 + \dots \right\} \right]} h^2 dh \quad (A 1,6)$$

2. Kraft  $\mathfrak{R}$ , welche auf die in einem Abstände  $h$  voneinander befindlichen Enden eines Fadens wirken um eine Kontraktion des Fadens zu verhindern

Unter Zugrundelegung der Verteilungsfunktion (A 1,1) ist

$$\mathfrak{R} = \frac{kT}{A_m} \frac{3 h}{N_m A_m} \quad (A 1,7)$$

unter Zugrundelegung von (A 1,2)

$$\mathfrak{R} = \frac{kT}{A_m} \beta(h) \quad (A 1,8)$$

wobei  $\beta(h)$  durch (A 1,3) bzw. durch (A 1,4) gegeben ist. Für starke Entknäuelung, d. h. für  $\frac{h}{N_m A_m} > 1$  erhalten wir somit

$$\mathfrak{R} = \frac{kT}{A_m} \frac{1}{1 - \frac{h}{N_m A_m}} \quad (A 1,9)$$

3. Freie elektrische Energie  $U$  eines in sehr dünnter Lösung auf den Ionisationsgrad  $\alpha$  geladenen Molekülfadens (Beispiel: Polyacrylsäure) in Abhängigkeit von  $\alpha$  und vom Abstände  $h$  der Fadenenden

Durch Auswertung der Beziehung (11) erhält man als im gesamten Bereich von  $h=0$  bis  $h=N_m A_m$  brauchbare Näherung

$$U(h, \alpha) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{N_m A_m}}{h} \ln \left( 1 + \frac{3 h^2}{2 N_m A_m^2} \right) + \text{arc tg} \sqrt{\frac{2 N_m A_m^2}{3 h^2}} \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 Z^2}{\sqrt{N_m A_m^2 D}} \right] \quad (A 1,10)$$

(Näherung für alle Werte von  $h$  für  $h=0$  bis  $h=N_m A_m$ )

Sie geht für große Werte von  $h$ , d. h. für den Fall starker Entknäuelung der Fäden über in

$$U(h, \alpha) = \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 Z^2}{D h} \ln \frac{3 h^2}{2 N_m A_m^2} \quad (A 1,11)$$

(Näherung für stark entknäuelte Fäden).

4. Mittleres Abstandsquadrat  $\bar{h}_e^2$  des in Lösung befindlichen Fadens in Abhängigkeit vom Ionisationsgrade  $\alpha$ .

Formelmäßig ergibt sich für das mittlere Abstandsquadrat  $\bar{h}_e^2$  des elektrisch bis zum Ionisationsgrade  $\alpha$  aufgeladenen Fadens bei kleinen Werten von  $\alpha$  bei schwacher Entknäuelung

$$\bar{h}_e^2 = N_m A_m^2 \left[ 1 + 0,057 \frac{\alpha^2 \varepsilon^2 Z^2}{D k T} \sqrt{\frac{3 \pi}{2 N_m A_m^2}} \right] \quad (A 1,12)$$

(Näherung für schwache Entknäuelung)

und im Falle starker Entknäuelung [praktisch gehen wir im Falle  $h \geq \frac{N_m A_m}{2}$ ]:

$$\bar{h}_e^2 = (N_m A_m)^2 \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^2 \alpha^2}{2 b D k T} s_m \ln N_m} \right] \quad (A 1,13)$$

(Näherung für starke Entknäuelung).



Die letztere Beziehung ergibt sich, wenn man für die Näherung (A 3,2) benützt und den negativen Potential-Quotienten dieser Funktion nach  $h$  gleich für starke Entknäuelung geltenden Rückstellkraft (3) setzt. Da im Falle von Polyacrylsäure  $2,5 \cdot 10^{-8}$  cm beträgt, erkennt man, daß  $\frac{e^2}{2bDkT}$  eine wässrige Lösung bei 18° C ungefähr gleich wird, so daß sich (A 4,2) vereinfacht zu

$$\bar{h}_e^2 = (N_m A_m)^2 \left[ 1 - \frac{1}{1 + 1,4 \alpha^2 s_m \ln N_m} \right] \quad (\text{A } 4,3)$$

Näherung für Polyacrylsäure; starke Entknäuelung).

**Literatur.** [1] KUHN, W.: Kolloid. Z. 68, 2 (1934). Zusammenfassung und weitere Literatur siehe KUHN, W.: *Excerpta* 1, 6 (1945). — [2] KUHN, W. u. H. KUHN: *Helv. Acta* 26, 1394 (1943). — [3] KUHN, H.: *J. chem. Phys.* 15, 843 (1947). Siehe auch [1]. — [4] TAYLOR, W. J.: *Am. Physics* 15, 412 (1947). — [5] SADRON, C.: *J. chem. Phys.* 43, 12 (1946). — [6] BENOIT: Report of a lecture at the High Polymer Conference, Strasbourg Nov. 1946. — KUHN, H.: *J. Polymer Sci.* 5, 331 (1950). — [8] KUHN, W. u. F. GRÜN: *Kolloid-Z.* 101, 248 (1942). — [9] KUHN, W.: *Kolloid-Z.* 76, 258 (1936). — [10] KUHN, W. u. F. GRÜN: *J. Polymer Sci.* 1, 183 (1946).

— [11] KUHN, W., O. KÜNZLE u. A. KATCHALSKY: *Bull. Soc. chim. Belgique* 57, 421 (1948); *Helv. chim. Acta* 31, 1994 (1948). — [12] KÜNZLE, O.: *Recueil Trav. chim. Pays-Bas* 68, 699 (1949). — [13] KATCHALSKY, A., KÜNZLE, O. u. W. KUHN: *J. Polymer Sci.* 5, 283 (1950). — [14] HERMANS, J. J. u. J. TH. G. OVERBECK: *Bull. Soc. chim. Belgique* 57, 154 (1948); *Rec. Trav. chim. Pays-Bas* 67, 761 (1948). — [15] ARNOLD, R. u. J. TH. G. OVERBECK: *Recueil Trav. chim. Pays-Bas* 69, 192 (1950). — [16] KUHN, W. u. B. HARGITAY: *Z. Elektrochem. angew. physik. Chem.* 55, 490 (1951) insbesondere S. 501. — [17] KUHN, W., H. KUHN u. P. BUCHNER: *Ergebn. exakt. Naturwiss.* Band 25. — [18] Siehe z. B. STAUDINGER, H.: Die hochmolekularen organischen Verbindungen, Berlin 1932. — [19] KUHN, W.: *Z. physik. Chem., Abt. A* 161, 1 (1932). — [20] BOEDER, P.: *Z. Physik* 75, 258 (1932). — [21] DONNAN, F. G. u. A. B. HARRIS: *J. chem. Soc. [London]* 99, 1575 (1911). — [22] PROCTER, H. R. u. J. A. WILSON: *J. chem. Soc. [London]* 109, 307 (1916). — [23] NEALE, S. M.: *J. Textile Inst.* 20, T 373 (1929). — [24] KUHN, W.: *Experientia* 5, 318 (1949). — [25] KATCHALSKY, A.: *Experientia* 5, 319 (1949). — [26] KUHN, W., B. HARGITAY, A. KATCHALSKY u. H. EISENBERG: *Nature* 165, 515 (1950). — [27] BREITENBACH, J. W. u. H. KARLINGER: *Mh. Chem.* 80, 311 (1949). — [28] KUHN, W. u. B. HARGITAY: *Experientia* 7, 1 (1951).

Prof. Dr. W. KUHN, Physikalisch-Chemische Anstalt der Universität Basel.

## Buchbesprechungen.

**Immerer, J. S.: Wärme- und Kälteschutz in der Industrie.** Auflage. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1951. 161 S. mit 126 Abbildungen. Geb. DM 36.—

Man kann wohl sagen, daß das vorliegende Buch ein Handwerk auf dem einschlägigen Gebiete ist. Dies ist schon darin zum Ausdruck, daß nun die 3. Auflage auskam. Neu bearbeitet wurden die Abschnitte über Schutzstoffe und über baulichen Wärmeschutz, bezügender inzwischen wesentliche Fortschritte erzielt wurden. Deren waren nur Ergänzungen und kleinere Änderungen. Ob die Zahlentafeln der natürlichen Logarithmen der Anhang enthält, in dem Buch notwendig sind, ist Referent bezweifeln, da doch jeder Benutzer des Buches ein Tabellenwerk, in dem auch die natürlichen Logarithmen enthalten sind, besitzen dürfte.

Unweifellos wird, wie bisher, das Buch in allen Instituten, die sich mit den einschlägigen Fragen befassen, unentbehrlich sein.

W. MEISSNER.

**Sauer, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik.** 1. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1950. 174 S. 7 Abb. DM. 16.50.

Das vorliegende Buch, das jetzt in zweiter Auflage erscheint, beschäftigt sich mit den Gasbewegungen, bei denen Kompressibilität (im Unter- und Überschallbereich) vernachlässigt werden darf. Wie in der ersten Auflage werden auch hier ausschließlich stationäre Vorgänge behandelt und zwar unter Vernachlässigung aller Reibungs- und Viskositätskräfte, sowie der Wärmeleitfähigkeit des Gases. Im ersten Teil ist der Inhalt des Buches gegenüber der ersten Auflage in verschiedener Hinsicht erweitert worden und zerfällt in fünf Hauptabschnitte. Im ersten werden die kinematischen und thermodynamischen Grundbegriffe der strömenden Gasströmung besprochen. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den „linearisierten“ Über- und Unterschallströmungen und zwar sowohl für ebene als auch räumliche Vorgänge. Im dritten und vierten Abschnitt werden die nichtlinearisierten Strömungen behandelt, insbesondere auch Verdichtungsstoß, Stoßpolarendiagramm und das praktisch besonders wichtige Charakteristikenverfahren, das auch auf nicht wirbelfreie Strömungen angewandt wird. Der letzte Abschnitt schließlich enthält Untersuchungen von räumlichen Überschallströmungen mit Anwendungen auf Drehkörper mit Anstellwinkel und Tragflächen. Das Buch wendet sich in erster Linie an mathematisch geschulte Leser. Experimentelle Methoden und Ergebnisse werden — wie der Titel bereits besagt — nicht besprochen. Dank seiner ausgezeichneten Methodik hat es bereits jetzt seinen Platz in der einschlägigen Literatur verdient.

W. KAUFMANN.

**Sauer, R.: Écoulements des fluides compressibles.** Paris et Liège: Librairie polytechnique Ch. Béranger. 1951. 307 S. u. 150 Abb. Fr. 3900.—

Wie aus dem Vorwort des Buches hervorgeht, hat dieses seinen Ursprung in den „Vorlesungen über nichtstationäre Probleme der Gasdynamik“ des Verfassers, deren Veröffentlichung im Jahre 1945 geplant war, aber nicht erfolgen konnte. Es bildet insofern eine begrüßenswerte Ergänzung zu dem oben besprochenen Buche über „Theoretische Gasdynamik“ als hier neben den stationären auch nichtstationäre Vorgänge (Strömung in Rohren, Potential, Stromfunktion, Linearisierung usw.) behandelt werden. Stofflich gesehen ist der Inhalt des vorliegenden Werkes in großen Zügen der gleiche wie in dem oben genannten Buche. Der Verfasser ist auch hier bestrebt — unter sorgfältiger Wahrung der mathematischen Strenge — die für die praktische Anwendung wesentlichen Methoden, insbesondere das Charakteristikenverfahren, besonders klar herauszuarbeiten. Der deutsche Leser wird freilich lieber zu dem an erster Stelle besprochenen Buche greifen, wenn auch der französische Text bei einiger Beherrschung der Sprache verhältnismäßig leicht zu lesen ist. Immerhin wäre es wünschenswert, wenn der Verfasser in eine spätere Auflage seiner „Theoretischen Gasdynamik“ auch die entsprechenden Betrachtungen über instationäre Strömungen mit aufnehmen würde, was von vielen deutschen Lesern sicherlich begrüßt würde.

W. KAUFMANN.

**Burstyn, W.: Elektrische Kontakte und Schaltvorgänge.** Grundlagen für den Praktiker 3. Auflage. Berlin: Springer-Verlag 1950. VII, 98 S. u. 82 Abb. Geh. DM 6.50.

Wie Verf. schon im Titel ausdrücklich betont, ist die Schrift vor allem für den Praktiker bestimmt. Sie unterscheidet sich dadurch von dem mehr wissenschaftlich eingestellten Buch von B. HOLM über elektrische Kontakte (vgl. das Referat in dieser ZS. 2, 230 (1950)). Nach allgemeinen einführenden Betrachtungen werden vom Verf. in größeren Abschnitten behandelt: Das Ausschalten von Gleichstrom und Wechselstrom, Das Einschalten von Stromkreisen, Übergangswiderstände, Sonstige störende Erscheinungen, Pflege der Kontakte, Erwärmung von Schaltern, Die Abnutzung von Druckkontakten bei Gleichstrom und Wechselstrom, Die Abnutzung von Schleifkontakten, Besondere Schalter.

Hervorzuheben ist, daß Verf. sein Buch auch auf eigene Arbeiten stützt, in ihm überall kritisch vorgeht und teilweise, wie z. B. bei der Grob- und Feinwanderung, praktische Verbesserungsvorschläge macht. Auch die wichtigen Arbeiten HOLMS sind in der neuen Auflage weitgehend berücksichtigt.

Daß eine 3. Auflage notwendig wurde, zeigt, daß das Buch großen Anklang fand. Sicher wird das auch für die



neue Auflage, die weit mehr als die ersten Auflagen bringt, gelten.  
W. MEISSNER.

**Sisco, F. T. u. H. Siegel: Das Elektrostahlverfahren.** Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1951. 432 S. u. 140 Abb. DM 31.50.

Das vorliegende Buch gibt einen klaren Überblick über das Elektrostahlverfahren. Es behandelt die Lichtbogenöfen, die Niederfrequenzöfen, die Hochfrequenzöfen und die beim Betrieb dieser Öfen auftretenden metallurgischen Fragen.

Der Verfasser beabsichtigt in erster Linie dem Leser zu zeigen, wie einwandfreier Elektrostahl erschmolzen werden kann. Für eine Besprechung des Buches in der Zeitschrift für angewandte Physik wird insbesondere die Feststellung von Interesse sein, wie weit der Inhalt als angewandte Physik anzusprechen ist. Eine Durchsicht des Buches zeigt, daß diese Frage für einen erheblichen Teil des Buches zu bejahen ist, insbesondere für die Abschnitte über die elektrische Ausrüstung der Lichtbogenöfen, über die kernlosen Induktionsöfen, über die feuerfesten Baustoffe und über metallurgische Fragen. In diesen Abschnitten werden die physikalischen Vorgänge in Lichtbögen, die Kopplungsverhältnisse und die Bewegungsvorgänge der Schmelze im Hochfrequenzofen, die physikalischen Eigenschaften von feuerfesten Stoffen und von Metallschmelzen behandelt.

Der Inhalt des Buches wird deshalb auch für solche Leser von Interesse sein, welche sich nicht ausgesprochen mit der Herstellung von Elektrostahl oder dem Bau der dazu erforderlichen Öfen zu befassen haben. E. WINTERGERST.

**Brügel, W.: Physik und Technik der Ultrarotstrahlung.** Hannover: Curt R. Vincentz 1951. 250 S. u. 148 Abb. Geb. DM 23.50.

Das Buch gibt einen gedrängten Überblick über das gesamte Gebiet der Ultrarotstrahlung. Im ersten Teil werden die physikalischen Grundlagen behandelt. Der Verfasser geht dabei ein auf die Strahlungsgesetze, auf die Gesetze für die Ausbreitung der Strahlung, auf Strahlungsquellen, auf die spektrale Zerlegung, auf Strahlungsempfänger und die Strahlungsmessung. Der zweite Teil bringt technische Anwendungen unterteilt nach der Anwendung in der Photographie, Medizin, Nachrichtentechnik, Chemie und Trocknungs- bzw. Härtungstechnik. Verschiedene Tabellen, ein Literaturverzeichnis und ein Sachverzeichnis schließen das Werk ab. Das Buch ist insbesondere für Physiker oder Ingenieure bestimmt, welche im Rahmen ihrer beruflichen Arbeit auf Fragen der Ultrarottechnik stoßen und welche sich einen Überblick über das gesamte Gebiet verschaffen wollen. Dementsprechend ist besonderer Wert auf die Grundlagen gelegt. Die Theorie wird nur soweit behandelt, wie es jeweils für das Verständnis erforderlich ist.

E. WINTERGERST.

**Bauer, H. A.: Grundlagen der Atomphysik.** Eine Einführung in das Studium der Wellenmechanik und Quantenstatistik. 4. Aufl. Wien: Springer 1951. 631 S. u. 244 Abb. DM 45,—.

Die beiden Abschnitte I und II, die etwa die Hälfte des Buches ausmachen, bringen die wichtigsten Erfahrungstatsachen der Atomphysik. Zu einer vorläufigen Deutung der Zusammenhänge werden außer der klassischen Theorie die anschauliche BOHRsche Atomtheorie und die anschaulichen Theorien der Kernstruktur herangezogen. Die Apparate und Methoden, die zur Feststellung dieser Tatsachen geführt haben, werden ausführlich beschrieben.

Abschnitt I behandelt die Teilchenstruktur der Materie, d. h. die von der Teilchenauffassung her verständlichen Erscheinungen, Abschnitt II die Wellenstruktur. Dabei ist der Begriff Materie in dem Sinne gemeint, daß auch die Strahlung in ihren beiden Auffassungen inbegriffen ist. Die Darstellung ist durch zahlreiche Photographien und schematische Abbildungen von Apparaten und Versuchsanordnungen, durch Nebelkammeraufnahmen, Diagramme usw. unterstützt.

Der Abschnitt III bringt als einheitliche Beschreibung des Verhaltens der Materie nach einigen vorbereitenden Betrachtungen die SCHRÖDINGERSche Wellenmechanik nebst den einfachsten Anwendungen. Am Beispiel des harmonischen Oszillators wird auch das Rechenverfahren der Matrizenmechanik kurz erläutert. Es folgt in Abschnitt IV die SCHRÖDINGERSche Störungstheorie mit ihren wichtigsten Anwendungen.

Der nächste Abschnitt (V) enthält eine recht ausführliche Darstellung der DIRACschen Theorie einschließlich Löchertheorie mit ihren an der Erfahrung prüfbaren Aussagen.

Der letzte Abschnitt (VI) macht den Leser mit den Grundlagen der Quantenstatistik vertraut und bringt verschiedene Anwendungen auf die Materie, auf die Strahlung und auf Atommodelle.

Den Schluß bildet ein Verzeichnis von zusammenfassenden Darstellungen aus dem Gesamtgebiet der einzelnen Teilgebieten der Atomphysik.

Quantentheorie der Wellenfelder, im besonderen Quantenelektrodynamik ist nicht in dem Buch enthalten.

Der behandelte Stoff entspricht etwa dem Inhalt SOMMERFELDS Standardwerk „Atombau und Spektrallinien“. Die Erfahrungstatsachen der Atomphysik und die Gewinnung werden aber von BAUER meist wesentlich ausführlicher und der Zeitdifferenz von 20 Jahren entsprechend moderner dargestellt. Demgegenüber fehlt die über Handhabung der mathematischen Methoden, die SOMMERFELDS Darstellung kennzeichnet. Allgemeine theoretische Betrachtungen sind auf das notwendigste beschränkt. wellenmechanische Behandlung des Photo- und des Compton-Effektes und des Röntgenkontinuums wird übergegangen. Die Einführung und Diskussion allgemeiner Begriffe fehlt meist bei der Behandlung eines speziellen Beispiels, was Anfänger den Zugang zur Theorie sicherlich erleichtert, aber die Reichweite von Begriffen und Methoden immer erkennen läßt. Die durchgeführten speziellen Anwendungen werden so ausführlich gebracht, daß auch mathematisch weniger gewandte kaum Schwierigkeiten haben kann. Vorausgesetzt wird die klassische Theorie der Physik einschließlich der Anfangsgründe der Relativitätstheorie.

Einige kleine Mängel können den Wert des Buches beeinträchtigen. Erwähnt sei nur ein für den Anfänger gefährliches Versehen in der Unterschrift zu Abschnitt V (S. 351). Von der dort dargestellten, bei einer Wellenlänge von  $3,5 \mu$  aufgenommenen Spektralkurve wird gesagt, sie sei dem Schwärzungsverlauf einer photographischen Aufnahme wiederzugeben.

Dieses sowohl vom experimentellen, wie vom theoretischen Standpunkt geschriebene, leicht faßliche Werk, das auch die neuesten kernphysikalischen Erfahrungen berücksichtigt, ist für alle geeignet und empfehlenswert, die eine ernste Beschäftigung mit der Atomphysik unerläßlich zur Vorbereitung besitzen. Das Buch geht so weit, daß es nicht nur dem Anfänger auf dem Gebiet der Atomphysik, sondern auch dem Fortgeschrittenen noch manches zu bieten mag, was er bisher nur in spezielleren Darstellungen finden konnte. G. HETTINGER.

**Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie.** 8. Aufl. System-Nr. 4: Titan. Verlag Chemie 1951. XXII u. 480 S. mit 100 Figuren. Preis DM 113,—.

Der vorliegende Band über Titan ist die erste große, sich abgeschlossene Lieferung nach dem Kriege. In Zusammenhang hiermit werden in einem Vorwort von dem Vorsitzenden des Gmelin-Kuratoriums, GOLDSCHMIDT, dem Direktor des Gmelin-Institutes, PIETSCH, interessante Einzelheiten über den Wiederaufbau der Gmelin-Anstalt mitgeteilt. Das Gmelin-Institut wurde bereits 1946 in Obhut der MAX-PLANCK-Gesellschaft übernommen. So ist bei dem vorliegenden Band war es möglich, eine Vervollständigung aus der Industrie zu erreichen. — Das Buch hat die größeren Unterabschnitte: Vorkommen, technische Darstellung von Titandioxyd und Gewinnung von Titanmetall, Bildung und Reindarstellung des Elementes, Kristallstruktur, physikalische Eigenschaften, elektrochemisches, physiologisches Verhalten, Legierungen, Verbindungen des Titans, Allgemeine Reaktionen der Titanverbindungen.

An der Bearbeitung dieses umfangreichen Stoffes hat 25 Wissenschaftler beteiligt. Es ist sehr erfreulich, wie trotzdem die einzelnen Teile aufeinander abgestimmt und Wiederholungen vermieden sind. Zweifelloso wird der vorliegende Band einen ebenso großen Anklang finden wie die früheren Auflagen des Handbuches. W. MEISSNER.